

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

28. Band, Heft 1

30. September 1943

S. 1—48

Geschichte.

Dittrich, A.: Die astronomischen Inschriften in Quiriguá. (Untersuchungen zur Astronomie der Maya, Nr. 15.) Abh. preuß. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. 1943, 1—50 (Nr 10).

Astronomische Deutung von Dateninschriften der Mayatempel in Quiriguá aus dem Nachlaß Ludendorffs mit Bemerkungen des Herausgebers Dittrich über andere mögliche Deutungen, welche die Kenntnis des siderischen und des tropischen Jahres implizieren.
van der Waerden (Leipzig).

Garbers, Karl: Das aktuelle Interesse am Studium der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften im islamischen Kulturkreis. Z. ges. Naturwiss. 9, 21—34 (1943).

Der Vortrag bringt zunächst einen Überblick über die Forschungen der letzten 100 Jahre auf dem Gebiet der muslimischen Mathematik und Naturwissenschaft, um dann Vorschläge für die Weiterführung dieser Studien zu machen. Er gibt ferner eine kurze Geschichte der Blütezeit arabischer Kultur von den ersten Abbassiden bis zum Mongolensturm. Er empfiehlt ein eingehendes Studium des reichen handschriftlichen Materials vor allem auch der Zeit der Verschüttung der Tradition und in Hinsicht auf die Beziehungen zu anderen Kulturkreisen. Gelegentlich angedeutete Resultate, wie die Herleitung unserer Bezeichnung der Unbekannten mit x aus dem Anfangsbuchstaben des arabischen Wortes für dieselbe, bedürften wohl einer eingehenderen Begründung.
Thaer (Detmold).

Hofmann, Joseph Ehrenfried: Cusanus-Studien. 7. Die Quellen der Cusanischen Mathematik. I. Ramon Lulls Kreisquadratur. S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1941/42, 1—36 (Abh. 4).

Gewisse mathematische Leistungen des Nicolaus von Cusa, namentlich seine Kreisrechnungen, sind von späteren Mathematikern, insbesondere von Regiomontanus, sehr geringschätzig behandelt worden. Verf. zeigt, daß eine der unmittelbaren Quellen der Cusanischen Mathematik bei dem katalanischen Philosophen Ramon Lull (1232—1316) zu suchen ist, und zwar insbesondere in dessen Abhandlung „De quadratura et triangulatura circuli“, die, ursprünglich in katalanischer Sprache geschrieben, im Jahre 1299 verfaßt wurde. Lull war kein Fachmathematiker; seine Ausdrucksweise und seine Schlüsse erscheinen zuweilen naiv und seltsam; die Wertung seiner Wissenschaftsmethode, der *Ars generalis*, schwankt im Laufe der Jahrhunderte. Erst neuerdings lernt man, sich bei der Beurteilung der mittelalterlichen Wissenschaft von unseren bisherigen Auffassungen frei zu machen, sie aus ihrer eigenen Zeit heraus zu verstehen und die Entwicklungslinien herauszuarbeiten, die von den oft wunderlich anmutenden Gedankengängen zu der späteren exakten Wissenschaft führen. In tief schürfender Einfühlung sucht Verf. dem mathematischen Teil der Lullischen *Quadratura et triangulatura circuli* gerecht zu werden, deren lateinische Fassung nebst den zugehörigen Abbildungen auf S. 21—37 herausgegeben wird. Er zeigt, wie sich darin die Keime späterer allgemeiner Methoden, z. B. des Schlusses von n auf $n + 1$ und des Grenzübergangs, finden, wie Lull zu recht brauchbaren Näherungswerten für π kommt, und stellt die gedankliche Leistung des mittelalterlichen Gelehrten heraus. Schließlich weist er auf die wissenschaftsgeschichtlichen Entwicklungslinien hin, die zu den Arbeiten über die Kreisquadratur des Cusaners und anderer Mathematiker des 15. Jahrhunderts und späterer Zeiten führen. So bildet die Arbeit mit

ihren sorgfältigen Quellenangaben einen wertvollen Beitrag zum Verständnis der geistigen Grundhaltung, aus der das wissenschaftliche Streben des Raimundus Lullus und des Nicolaus Cusanus herausgewachsen ist. *E. Löffler.*

● **Des Georg Joachim Rhetikus erster Bericht über die 6 Bücher des Kopernikus von den Kreisbewegungen der Himmelsbahnen.** Übers. u. eingeleitet v. Karl Zeller. München u. Berlin: R. Oldenbourg 1943. XII, 196 S. u. 21 Abb. RM. 8.50.

Als Vorläufer einer geplanten neunbändigen Kopernikus-Ausgabe legt der Verlag R. Oldenbourg zum 400. Todestag von Nikolaus Kopernikus eine erste vollständige deutsche Übersetzung der *Prima Narratio* des Joachim Rhetikus vor, die K. Zeller mit großer Sorgfalt hergestellt hat. Der Text nimmt nur die knappe Hälfte des Buches ein, der übrige Raum wird durch eine Einleitung (Stand der Astronomie um 1500, Biographisches über Kopernikus und Rhetikus) und vor allem durch einen Nachbericht in Anspruch genommen, bei dem sich Verf. an das von M. Caspar in der Kepler-Ausgabe gegebene Vorbild gehalten hat. Dieser Nachbericht macht reiche biographische Angaben, erwähnt textliche Varianten, bringt das Verständnis erleichternde Figuren und führt im Text angedeutete Rechnungen ausführlich durch. So fügt Verf. der Übersetzung aus dem Lateinischen ins Deutsche noch die Übertragung aus der schwerfälligen, rein geometrischen Schlußweise in die Sprache unserer Mathematik hinzu, wodurch er das in der Geschichte der Wissenschaften wohl einzigartige Dokument einem breiteren Kreise erschließt. *v. Schelling* (Berlin).

Ortvay, Rudolf: Galilei und die Entfaltung des neuzeitlichen wissenschaftlichen Denkens. Mat. fiz. Lap. 49, 139—168 u. dtsch. Zusammenfassung 169 (1942) [Ungarisch].

In der Einleitung wird das Weltbild des Mittelalters geschildert: es stehen seelisch-moralische Fragen im Mittelpunkt, die Denkweise ist mythisch-analogisch-allegorisch in aristotelisch-scholastischer Form. Nach einem Entwurf des Lebenslaufes von Galilei werden seine Hauptverdienste aufgezählt: Bekämpfung der peripatetischen Philosophie, Wiederherstellung eines unmittelbaren Verhältnisses zur Natur, Forderung der Beobachtung und des Experimentes, Kampf für die kopernikanische Lehre, Neubegründung der Dynamik. *József Jelitai* (Budapest).

Sommerfeld, A., und C. Carathéodory: Zum Andenken an David Hilbert. Gestorben am 14. Februar 1943. Naturwiss. 31, 213—214 (1943).

Bachiller, T. R.: David Hilbert. Rev. mat. hisp.-amer., IV. s. 3, 77—81 (1943) [Spanisch].

Algebra und Zahlentheorie.

Allgemeines. Kombinatorik:

● **Haag, J.: Cours complet de mathématiques spéciales. T. 1. Algèbre et analyse.** 3. édit. Paris: Gauthier-Villars 1940. XII, 396 pag. ffrs 150.—.

Schöbe, Waldemar: Das Lucasche Ehepaarproblem. Math. Z. 48, 781—784 (1943).

Verf. behandelt das im Titel genannte Problem: Auf wie viele Arten können um einen Tisch mit $2n$ Stühlen n Ehepaare Platz nehmen, so daß jeder Mann zwischen zwei Frauen, aber keiner neben seiner Ehefrau sitzt. Für die Zahl A_n der möglichen Anordnung der Männer, nachdem sich die Frauen unter Freilassung jedes zweiten Stuhles gesetzt haben, war bisher nur eine von M. Laisant herrührende Rekursionsformel bekannt. Verf. gibt die Formel: Ist $h_n = n! \sum_{\nu=0}^n [(-1)^\nu / \nu!]$, so wird

$$A_n = 2(-1)^n + n \sum_{\nu=0}^n \{(-1)^\nu - 1 h_{n-\nu}^2 / [(\nu-1)!(n-\nu)!]\}.$$

Hieraus folgt leicht $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n/n! = e^{-2}$, genauer $A_n/n! = e^{-2} + O(1/n)$. *Holzer* (Graz).

Lineare Algebra:

Papy, Georges: Sur un lemme de M. J. Radon. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 11, 479—487 (1942).

Verf. beweist: Sind A, B rechteckige Matrizen vom Typus (m, n) über einem Körper, dessen Charakteristik $\neq 2$ ist, und ist der Rang der durch Aneinanderreihen von A und B gebildeten Matrix (AB) vom Typus $(m, 2n)$ höchstens gleich n , so gibt es eine symmetrische, orthogonale Matrix S , die nur die Elemente $-1, 0, +1$ enthält, derart, daß $A - BS$ und $AS - B$ denselben Rang haben wie (AB) . Verf. verallgemeinert und präzisiert damit einen Satz von Radon (vgl. dies. Zbl. 21, 291), der den Spezialfall: $m = n$, A und B komplexe Matrizen, betrachtet und lediglich die Existenz von S als symmetrischer, komplexer Matrix mit Mitteln der Analysis bewiesen hatte. Der Beweis des Verf. verläuft algebraisch und liefert darüber hinaus ein Konstruktionsverfahren zur wirklichen Berechnung von S . Zum Schluß werden einige Fälle angegeben, in denen $S = \lambda E$ wird. Rohrbach (Prag).

Uragg, Otto: Beitrag zur Theorie der ± 1 -Determinanten. Graz: Diss. 1941. VI, 61 Bl. (Maschinenschr.)

Gruppentheorie:

Schiek, Helmut: Über die Darstellungen von Gruppen mit quadratfreier Ordnungszahl. Leipzig: Diss. 1941. 53 Bl. (Maschinenschr.)

Die Gruppen quadratfreier Ordnung sind nach O. Hölder zweistufig metabelsch. Ihre Darstellungen sind sämtlich monomial. Auf Grund der Sätze von Shoda über monomiale Darstellungen (dies. Zbl. 7, 197) werden nun alle irreduziblen Darstellungen dieser Gruppen vollständig aufgezählt. van der Waerden (Leipzig).

Ore, Oystein: Theory of monomial groups. Trans. Amer. Math. Soc. 51, 15—64 (1942).

Die vollständige monomiale Gruppe $\Sigma_m(H)$ besteht aus allen monomialen Substitutionen, das sind solche, welche die Variablen x_k , $k = 1, \dots, m$ übergehen lassen in $r_k x_{i_k}$, wobei r_k ein Element einer endlichen oder unendlichen Gruppe H ist (siehe hierzu W. Specht, dies. Zbl. 4, 338; 7, 149; W. K. Turkin, dies. Zbl. 12, 249). Die vorliegende Abhandlung gibt eine ins einzelne durchgeführte Theorie dieser Gruppen. — I. Ist H die Identität, so erhalten wir die Gruppe S_m der Permutationen, sie ist in $\Sigma_m(H)$ als Untergruppe enthalten. Die Substitutionen, welche x_k in $r_k x_k$ überführen, heißen Multiplikationen $[r_1, \dots, r_m]$ und bilden einen Normalteiler $V_m(H)$ der $\Sigma_m(H)$, welcher die Basisgruppe genannt wird. Sie ist das direkte Produkt $H_1^* \times \dots \times H_m^*$ von m zu H isomorphen Gruppen $[1, \dots, r_i, \dots, 1]$. Die Multiplikationen $[a, \dots, a] = [a]$ heißen Skalare; diejenigen Skalare, für welche a zum Zentrum von H gehört, bilden das Zentrum von $\Sigma_m(H)$. Geht x_i über in $c_i x_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n$, so spricht man von einem Zyklus der Länge n ; jede monomiale Substitution läßt sich als Produkt elementfremder Zyklen darstellen und für diese wird eine Normalform angegeben. Jedes Element von $\Sigma_m(H)$ ist eindeutig zerlegbar als ein Produkt einer Permutation und einer Multiplikation, und wir erhalten dadurch eine Aufspaltung von Σ_m über V_m als Vereinigung von S_m und V_m : $\Sigma_m = S_m \cup V_m$, wobei der Durchschnitt $S_m \cap V_m$ die Identität E ist. Es wird das wichtige Problem gelöst, alle Aufspaltungen von $\Sigma_m(H)$ über V_m zu finden: $\Sigma_m(H) = T \cup V_m$ mit $T \cap V_m = E$. T ist isomorph zu S_m ; ist jedes T konjugiert zu S_m , so spricht man von regulärer Aufspaltung. Für $m = 2$ ist jede Aufspaltung regulär. Für $m \geq 3$ ist dies nur dann der Fall, wenn H keine eigentliche Untergruppe enthält, die isomorph zur S_{m-1} ist. Im allgemeinen Fall gelingt es dem Verf., T vollständig zu charakterisieren. — II. Um alle Normalteiler von $\Sigma_m(H)$ zu finden, werden zuerst diejenigen Untergruppen untersucht, welche durch alle Permutationen von S_m in sich übergehen. Sie können aus drei besonders einfachen Typen solcher Gruppen aufgebaut werden. Aus ihnen werden

durch zusätzliche Bedingungen die Normalteiler ausgeschieden. — III. In Verallgemeinerung der Untersuchungen von O. Hölder [Math. Ann. **46**, 321—422 (1895)] über die Automorphismengruppen der S_m werden diejenigen der $\Sigma_m(H)$ bestimmt, falls H eine endliche Gruppe ist. Für $m \geq 3$ ist die Basisgruppe stets charakteristische Untergruppe der $V_m(H)$. Die Automorphismen der Basisgruppe können mittels ihrer Endomorphismen bestimmt werden, die ihrerseits auf diejenigen von H zurückgeführt werden. Hiermit gelingt es, eine Konstruktionsvorschrift für die Automorphismen der $\Sigma_m(H)$ aufzustellen. Der Fall $m = 6$ muß gesondert behandelt werden. Da nach Hölder einzig für $m = 6$ die S_m einen äußeren Automorphismus besitzt, werden die Verhältnisse in diesem Falle verwickelter und die Berechnungen stehen noch aus. Im IV. Kapitel wird die Einbettung einer beliebigen Gruppe G in eine monomiale Gruppe behandelt. Eine monomiale Darstellung von G ist dabei ein Homomorphismus von G mit einer Untergruppe M_G von $\Sigma_m(H)$. Sei H Untergruppe von G vom endlichen Index m , alle transitiven monomialen Darstellungen entspringen dann den Zerlegungen von G nach H : $G = H + Hg_2 + \dots + Hg_m$ mit $gz = h(z) \cdot g_z$, z aus G , wodurch eine monomiale Substitution $x \rightarrow h(z)x_z$ induziert wird (Turkin). Um das Ergebnis zu vervollständigen, muß man sich unabhängig von der speziellen Wahl der g_i machen. Ist G allgemeiner bezüglich der Faktorgruppe H/K eines Normalteilers K von H dargestellt, so besitzt G als Untergruppe von $\Sigma_m(H/K)$ einen Normalisator N_G und einen Zentralisator. Die Automorphismen, welche durch die Elemente von N_G induziert werden, werden charakterisiert. Zuletzt werden noch Eigenschaften des entsprechenden Zentralisators angegeben.

J. J. Burckhardt (Zürich).

Rees, D.: On semi-groups. Proc. Cambridge Philos. Soc. **36**, 387—400 (1940).

Dans un demi-groupe $S = \{a, b, \dots\}$ (c.-à-d. un ensemble avec opération associative), un sous-ensemble $T = \{t, \dots\}$ est un idéal si l'on a pour tout $t \in T$: $at \in T$, $ta \in T$ quel que soit $a \in S$. — La première partie de ce travail contient des propositions analogues aux propositions fondamentales de la théorie des groupes (les idéaux jouant comme d'ordinaire le rôle des sous-groupes invariants): théorèmes d'isomorphisme (qu'on peut rapprocher des énoncés généraux donnés par le Réf. (cfr. le travail suivant), théorème de Zassenhaus, théorème de Jordan-Hölder (à rapprocher des propositions générales de Borůvka, ce Zbl. **24**, 299, et de A. I. Uzkow, ce Zbl. **20**, 206). — Un demi-groupe $S(\neq \{0, a\})$ est dit complètement simple si: 1°) il est simple (c.-à-d. ne contient aucun idéal $\neq (0)$ et $\neq S$; 2°) pour tout $x \in S$ existent des idempotents e, f tels que $xe = x$, $fx = x$; 3°) s'il existe un idempotent primitif sous tout idempotent non primitif (e est sous f si $ef = fe = e$; e est primitif s'il n'y a pas, sous e , d'idempotent $\neq 0$). Un demi-groupe simple dont tous les éléments sont d'ordre fini est complètement simple. Un demi-groupe complètement simple avec élément-unité est un groupe ou un groupe avec zéro (pseudo-groupe). Enfin, avec des définitions convenables (concernant les matrices, leurs produits et les demi-groupes de matrices réguliers), on a les théorèmes suivants. Tout demi-groupe de matrices régulier sur un pseudo-groupe G est complètement simple. Tout demi-groupe complètement simple avec zéro, S , est isomorphe à un demi-groupe de matrices régulier sur un pseudo-groupe G ; G est isomorphe à eSe , e étant un idempotent non nul quelconque de S .

P. Dubreil (Nancy).

Dubreil, Paul: Remarques sur les théorèmes d'isomorphisme. C. R. Acad. Sci., Paris **215**, 239—241 (1942).

1. Es seien G, G^* nichtleere Mengen, f eine Abbildung von G auf G^* und \bar{G}_f die zu f gehörige Zerlegung von G (die Elemente von \bar{G}_f bestehen aus allen Elementen von G , die sich in f immer auf dasselbe Element von G^* abbilden). Eine Überdeckung \bar{H} von \bar{G}_f (d. h. eine Zerlegung von G , deren Elemente Summen von je einigen Elementen von \bar{G}_f sind) wird mittels f auf eine Zerlegung \bar{H}^* von G^* abgebildet, und diese Abbildung ist umkehrbar eindeutig. — 2. Es sei G eine nichtleere Menge,

$(0 \neq) A \subset G$ und ferner \bar{G} eine Zerlegung von G . Die durch die Inzidenz von Elementen der beiden Zerlegungen in G : $A \cap \bar{G}$ (die Menge der nichtleeren Durchschnitte von A mit den Elementen von \bar{G}) und $A \sqsubset \bar{G}$ (die Menge der mit A inzidenten Elemente von \bar{G}) definierte Zuordnung ist umkehrbar eindeutig. — Diese Sätze bilden den Kern von zwei Isomorphiesätzen der Gruppoidentheorie, die sich aus 1 und 2 durch Betrachtung von Gruppoiden \mathfrak{G} , \mathfrak{G}^* (anstatt G , G^*), einer homomorphen Abbildung f , Faktoroiden $\bar{\mathfrak{G}}$, $\bar{\mathfrak{G}}^*$ (anstatt \bar{H} , \bar{H}^*) und einem Untergruppoid \mathfrak{A} (anstatt A), eventuell mit Hinzunahme eines Operatorenbereiches, ergeben [vgl. Ref., Math. Ann. 118, 41—64 (1941), S. 55; dies. Zbl. 24, 299].

O. Borůvka (Brünn).

Verbände. Ringe. Körper:

Duthie, W. D.: Segments of ordered sets. Trans. Amer. Math. Soc. 51, 1—14 (1942).

x und y seien zwei Elemente eines Verbandes L . Die Gesamtheit der Elemente z mit $x \cap y \leq z \leq x \cup y$ heiße das Segment $[x, y]$. Ein Verband ist dann und nur dann modular, wenn die Identität der Segmente, die ein Element mit den Endpunkten eines zwei andere Elemente verbindenden Segmentes verbinden, stets die Identität dieser beiden Elemente zur Folge hat. Ein Verband ist dann und nur dann distributiv, wenn ein Element c , das dem Segment $[a, b]$ angehört, gleich dem Durchschnitt von $[a, c]$ und $[c, b]$ ist. Ordnet man die Segmente durch $[a, b] \leq [c, d]$ dann und nur dann, wenn $a \leq c$ und $b \leq d$ ist, an, nimmt man ferner ein Element Φ mit $\Phi < [a, b]$ für alle $[a, b]$ an, so bilden die Segmente eines Verbandes L einen Verband L_s . Ist L komplementär, so auch L_s . Ist L modular, so L_s im allgemeinen nur pseudomodular, d. h. wenn $b \cap c \neq 0$ ist, so ist $(a \cup b) \cap c = a \cup (b \cap c)$ für alle $a \leq c$. Diese Eigenschaft kann auch so erklärt werden: Ist jeder Teilverband eines Verbandes L mit Nullelement, der die Null nicht enthält, modular, so ist L pseudomodular. Analog wird die Pseudodistributivität erklärt. Ist L distributiv, so ist L_s pseudodistributiv. Über diese beiden Begriffe wird eine Reihe von Sätzen abgeleitet, z. B.: Die einzigen pseudodistributiven reduzierbaren komplementären modularen Verbände endlicher oder kontinuierlicher Dimension sind die Booleschen Algebren. Eine Teilmenge S von L heißt konvex, wenn sie mit zwei Elementen das durch sie bestimmte Segment enthält. Eine konvexe Teilmenge von L ist ein Teilverband von L . Ist L von endlicher Dimension, so ist jede konvexe Teilmenge ein Segment. Der Verband L_{cs} aller konvexen Teilmengen ist ein vollständiger Verband. Da L isomorph einem Teilverband von L_c ist, erhält man durch L_{cs} eine Einbettung von L in einen vollständigen Verband. G. Köthe.

Gorn, Saul: Homomorphisms and modular functionals. Trans. Amer. Math. Soc. 51, 103—116 (1942).

L sei im Folgenden stets ein modularer komplementärer Verband mit den Elementen 0 und 1. Eine Menge a von Elementen aus L heißt ein π -Ideal, wenn mit a und b ihr Produkt ab in a liegt und wenn aus $c \geq a$, $a \in a$, stets c in a folgt. Dual dazu das σ -Ideal. Mit Ca werde die Menge aller Komplemente der Elemente aus a bezeichnet. a heißt C -Ideal, wenn Ca ein Ideal ist. Ist a π -Ideal, so ist dann Ca σ -Ideal. a heißt neutral, wenn $CCa = a$ ist. Ein C -neutrales Ideal ist ein neutrales Ideal, das gleichzeitig C -Ideal ist. a sei ein C -neutrales π -Ideal, $Ca = \bar{a}$; gibt es zu zwei Elementen $a, b \in L$ ein $t \in a$ mit $ab = (a + b)t$, so heiße $a \equiv b$ nach a . Äquivalent damit ist die Erklärung: $a \equiv b(\bar{a})$, wenn es ein $u \in \bar{a}$ gibt mit $a + b = ab + u$. Dies ist eine Kongruenzbeziehung, die Elemente $\equiv 1$ bilden a , die kongruent 0 bilden \bar{a} . Umgekehrt wird jede Kongruenz in L auf diese Weise durch ein C -neutrales π -Ideal erzeugt. Durch die Kongruenz $x \equiv a(a)$ wird ein Quotientenverband L/a erklärt. Ist L' homomorphes Bild von L , so ist L' isomorph einem L/a , a das C -neutrale σ -Ideal aller auf 0 abgebildeten Elemente aus L (Homomorphiesatz). — Ist A eine Teilmenge von L , so sei $c_a A$ die Menge aller $x \in L$, $x \leq a$ für jedes $a \in A$, $c_\pi A$ entsprechend die Menge aller $x \in L$, $x \geq a$ für jedes $a \in A$. Ein σ -Ideal a heißt normal, wenn $a = c_\sigma c_\pi a$;

dual entsprechend. Ist α ein C -neutrales σ -Ideal, so sind $c_\sigma \bar{\alpha}$ und $c_\pi \alpha$ komplementäre C -neutrale Ideale, $c_\pi c_\sigma \bar{\alpha}$ und $c_\sigma c_\pi \alpha$ sind komplementäre C -neutrale normale Ideale. — α sei ein σ -Ideal. Mit α' werde die Menge aller $b \in L$ mit $ab = 0$ für alle $a \in A$ bezeichnet. Ist α C -neutrales σ -Ideal, so ist $\alpha' = c_\sigma \bar{\alpha} = (c_\sigma \bar{\alpha})'' = (c_\sigma c_\pi \alpha)'$ und

$$\alpha'' = (c_\sigma \bar{\alpha})' = (c_\sigma c_\pi \alpha)'' = c_\sigma c_\pi \alpha.$$

Ein C -neutrales Ideal ist dann und nur dann normal, wenn $\alpha = \alpha''$. Das aus den Restklassen der Elemente aus \bar{b} gebildete Ideal in L/α werde mit \bar{b}^* bezeichnet. α sei C -neutral und normal. Jedem C -neutralen normalen Ideal $\bar{b} \geq \alpha$ entspricht eindeutig ein C -neutrales normales Ideal \bar{b}^* in L/α und umgekehrt. — L heißt ideal irreduzibel, wenn es kein normales C -neutrales σ -Ideal enthält, abgesehen vom Null- und Einsideal. Ein modulares Funktional $r(x)$ auf L heißt Quasinorm, wenn $r(x) \geq 0$ ist, Norm, wenn überdies $r(x) = 0$ nur für ein x gilt, normiert, wenn noch $r(0) = 0$, $r(1) = 1$ ist. Ist $r(x)$ eine normierte Quasinorm in L , so ist die Menge aller $x \in L$ mit $r(x) = 1$ ein C -neutrales π -Ideal $\bar{\alpha}$, α ist die Menge aller x mit $r(x) = 0$; $a \equiv b(a)$ gilt dann und nur dann, wenn $r(ab) = r(a + b)$. Durch $r(x^*) = r(x)$ wird eine Norm in $L^* = L/\alpha$ erklärt, umgekehrt wird durch $r(x) = r(x^*)$ durch jede Norm in L^* eine Quasinorm in L erzeugt. Ist L eine Boolesche Algebra, so wird die normierte Quasinorm $r(x)$ durch das zugehörige σ -Ideal α dann und nur eindeutig bestimmt, wenn α prim ist. — Eine Quasinorm $r(x)$ heiße W.S.-Quasinorm (nach Wilcox und Smiley, dies. Zbl. 21, 108), wenn für jede Teilmenge $0 \subseteq A \subseteq L$ gilt: Es ist $\text{l.u.b.}_{a \in A} r(a) = \text{g.l.b.}_{b \in c_\pi A} r(b)$ und

$\text{g.l.b.}_{a \in A} r(a) = \text{l.u.b.}_{b \in c_\sigma A} r(b)$. Es gilt nun: Hat L eine W.S.-Norm, so ist L dann

und nur dann ideal irreduzibel, wenn seine vollständige Hülle \bar{L} irreduzibel ist. Besitzt L eine W.S.-Norm $r(x)$, so ist $r(x)$ dann und nur dann bis auf lineare Transformation eindeutig bestimmt, wenn L ideal irreduzibel ist. Hat L die W.S.-Quasinorm $r(x)$, so ist das zugehörige Ideal α normal.

G. Köthe (Gießen).

Klein, Fritz: Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen. 2. Math. Z. 48, 715—734 (1943).

Untersuchungen über höchstens abzählbare Holoide (Tl. 1 vgl. dies. Zbl. 27, 9) und insbesondere über lineare Holoide. Ein Holoide \mathfrak{M} wird als linear bezeichnet, wenn für $a, b \in \mathfrak{M}$ wenigstens eine der beiden Beziehungen $a \supseteq b$, $a \subseteq b$ besteht; in diesem Falle kann \mathfrak{M} geordnet werden

$$(e =) p^{[0]} \subset p^{[1]} \subset p^{[2]} \subset \dots,$$

wobei e die untere Spitze (d. h. die Einheit) von \mathfrak{M} bezeichnet. Das Hauptresultat über lineare Holoide besteht darin, daß das Produkt von zwei beliebigen Elementen von \mathfrak{M} durch die Verteilung der idempotenten Elemente in \mathfrak{M} bestimmt ist und nach einfachen Regeln berechnet werden kann. Z. B. mit $p^{[\xi]} \supseteq p^{[\epsilon]} \supseteq p^{[\eta]}$, wobei $p^{[\epsilon]}$ ein Idempotent ist, gilt $p^{[\xi]} p^{[\eta]} = p^{[\xi]}$.

O. Borůvka (Brünn).

Krull, Wolfgang: Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. 8. Multiplikativ abgeschlossene Systeme von endlichen Idealen. Math. Z. 48, 533—552 (1943).

Dans la partie I (ce Zbl. 15, 2), l'auteur a introduit, pour les idéaux \mathfrak{a} d'un domaine d'intégrité \mathfrak{R} , une opération — opération \mathcal{A} — faisant correspondre à \mathfrak{a} l'idéal obtenu en supprimant dans une décomposition de \mathfrak{a} en idéaux premiers tous les composants relatifs à des idéaux premiers dont l'ensemble \mathcal{A} vérifiait les deux hypothèses: a) \mathcal{A} ne contient aucun idéal premier minimal de \mathfrak{R} ; b) avec η , \mathcal{A} contient tout sur-idéal premier de η . Les progrès importants apportés par le présent Mémoire ont surtout leur origine dans une nouvelle définition de l'opération \mathcal{A} , qui généralise plus largement la formation des composants isolés. \mathcal{A} est maintenant un système multiplicativement fermé d'idéaux finis (c.-à-d. possédant une base finie), et l'idéal $\mathfrak{a}_{\mathcal{A}}$ déduit de \mathfrak{a} par l'opération \mathcal{A} est par définition l'idéal de tout les éléments a de \mathfrak{R} pour lesquels $(a) \cdot e \subseteq \mathfrak{a}$ avec $e \in \mathcal{A}$. Grâce à cette définition, les théorèmes fonda-

mentaux établis dans la partie I pour les domaines entier-fermés avec condition maximale sont démontrés ici sans cette condition. En outre, les démonstrations se simplifient et la théorie s'étend sans difficulté à la théorie des idéaux dans les semi-groupes commutatifs (cf. P. Lorenzen, ce Zbl. 21, 387). — Les résultats préparatoires (§ 1—3) concernent principalement la correspondance entre idéal-extension et idéal-contraction, et le plus important peut être formulé de la façon suivante. \mathfrak{S}_u étant un système multiplicativement fermé de polynômes de $\mathfrak{P} = \mathfrak{K}[u_1, u_2, \dots, u_r, \dots]$, soient \mathfrak{Q} l'anneau des quotients de \mathfrak{P} par rapport à \mathfrak{S}_u et \mathcal{A} le système multiplicativement fermé de tous les idéaux finis e de \mathfrak{K} pour lesquels $e \cdot \mathfrak{P}$ contient au moins un polynôme de \mathfrak{S}_u ; on a, pour tout idéal a de \mathfrak{K} , l'égalité $(a \cdot \mathfrak{Q}) \cap \mathfrak{K} = a_{\mathcal{A}}$, et $a \cdot \mathfrak{Q}$ possède dans \mathfrak{Q} une structure analogue à celle de $a_{\mathcal{A}}$ dans \mathfrak{K} . — Le § 4 est consacré au problème (indépendant) de l'équivalence des deux propriétés: 1) $a : e = a$; 2) il existe $c \in e$ tel que $a : (c) = a$, pour un idéal quelconque a et un idéal fini e . Des conditions précises sont données pour cette équivalence (théorèmes 11 et 12). — Les résultats essentiels sont contenus dans les § 5 et 6. Pour qu'une opération \mathcal{A} soit une opération ' (voir ce Zbl. 15, 2), il faut et il suffit que l'on ait

(I) $(a)_{\mathcal{A}} = (a)$ pour tout idéal principal (a) .

Dans un ordre principal fini discret, il faut et il suffit que le système \mathcal{A} ne contienne aucun sous-idéal d'un idéal premier minimal de \mathfrak{K} (ce dernier énoncé contient le résultat correspondant de la partie I, 10). Si w est une opération ' de type fini (c.-à-d. telle que, pour tout idéal a , $a' = a_w$ soit la somme des e' correspondant aux idéaux finis $e \subseteq a$), et si une opération \mathcal{A} vérifie la condition (I), l'opération composée $w_{\mathcal{A}}$ définie par $a_{w_{\mathcal{A}}} = (a_w)_{\mathcal{A}}$ est aussi une opération ' de type fini. Dans le cas d'un domaine \mathfrak{K} entier-fermé, si l'opération w est arithmétiquement utilisable (c.-à-d. si, pour tout e fini, la relation $e \cdot a \subseteq (e \cdot b)_w$ entraîne $a \subseteq b_w$), $w_{\mathcal{A}}$ l'est aussi. Avec la même hypothèse sur \mathfrak{K} (mais sans condition maximale), l'anneau fonctionnel de Kronecker $\tilde{\mathfrak{M}}_{w_{\mathcal{A}}}$ se déduit simplement de $\tilde{\mathfrak{M}}_w$ comme anneau de quotients; il existe une correspondance biunivoque entre toutes les opérations $w_{\mathcal{A}}$ provenant d'une opération w de type fini et arithmétiquement utilisable donnée, et les anneaux quotients de $\tilde{\mathfrak{M}}_w$ correspondant à des systèmes multiplicativement fermés de polynômes et dont l'intersection avec le corps des quotients \mathfrak{K} de \mathfrak{K} est exactement \mathfrak{K} .

P. Dubreil (Nancy).

Monna, A. F.: Zur Theorie des Maßes im Körper der P-adischen Zahlen. Akad. Wetenschap. Amsterdam, Proc. 45, 978—980 (1942).

Verf. gibt eine eindeutige Abbildung der Menge $R: 0 \leq x \leq 1$ auf die Menge $K_t(P)$ der P-adischen Zahlen (P prim), deren Wert $\leq P^{-t}$ (t ganz) ist. Dadurch kann die Lebesguesche Maßtheorie von R auf $K_t(P)$ übertragen werden und man erhält so die Maßtheorie von Turkstra.

E. Hlawka (Wien).

Monna, A. F.: Zur Geometrie der P-adischen Zahlen. Akad. Wetenschap. Amsterdam, Proc. 45, 981—986 (1942).

Verf. stellt mit Hilfe der Maßtheorie von Turkstra (vgl. vorsteh. Ref.) ein Analogon zum Satz von Visser (dies. Zbl. 21, 303) auf. Dadurch ergibt sich ein neuer Weg zur Aufstellung einer Geometrie der Zahlen im p-adischen (vgl. dies. Zbl. 27, 160).

E. Hlawka (Wien).

Kaloujnine, Léo: Sur la théorie de Galois des corps non galoisiens séparables. C. R. Acad. Sci., Paris 214, 597—599 (1942).

Définition directe de l'hypergroupe attaché à une extension $K = k(\theta)$ algébrique finie et séparable, mais non galoisienne. Cet hypergroupe est l'ensemble \mathcal{H} des „hypermorphismes“ de K , c.-à-d. des isomorphismes de K regardé comme système hypercomplexe sur k , avec ses représentations irréductibles. Si dans la matrice σa ($\sigma \in \mathcal{H}$, $a \in K$), on remplace chaque élément m par la matrice τm ($\tau \in \mathcal{H}$), on obtient une matrice définissant une représentation de K ; celle-ci se décompose en représentations irréductibles dont l'ensemble est par définition le produit $\tau \sigma$. Par rapport à

cette loi de composition, l'ensemble des hypermorphisms est un hypergroupe. La généralisation du théorème fondamental de la théorie de Galois ne nécessite pas non plus le passage par un surcorps galoisien. *P. Dubreil (Nancy).*

Zahlentheorie:

Tihanyi, Miklós: Die Berechnung der Weberschen Resolvente. *Mat. fiz. Lap.* 49, 70—72 u. dtsch. Zusammenfassung 72 (1942) [Ungarisch].

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 25, 393) hat Verf. seine Formel auch für den Fall $2 \nmid n$ ($n \geq 5$) „eingliedrig“ ausgedrückt:

$$((-1)^{h_1}, \omega^h, r) = (-1)^{\frac{h_1(r_0-1)}{2}} 2^{k-1} \omega^h \text{ind } r_0 r^{r_0} (1 + i^{1+h+2s-t}),$$

wobei $n = 2k - 1$ ist, r_0, s, t ganz rational sind mit

$$h + l_1 r_0 = 2^{k-1} s, \quad 5^{2^{k-3}} \equiv 1 + 2^{k-1} l_1 + 2^{n-2} t \pmod{2^n} [t = \pm 1],$$

während alle übrigen Symbole aus dem o. a. Referat zu entnehmen sind. *L. Rédei.*

Mordell, L. J.: On sums of three cubes. *J. London Math. Soc.* 17, 139—144 (1942).

Es wird bewiesen: Ist n eine rationale Zahl, so gibt es dann und nur dann drei Polynome höchstens vierten Grades $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ in einem Parameter t mit rationalen Koeffizienten und der Eigenschaft (1) $x^3 + y^3 + z^3 = n$, wenn n mit rationalem a die Gestalt $2a^3$ oder a^3 hat. Bis auf die Reihenfolge der Summanden sind die einzigen derartigen Lösungen von (1) im Falle $n = 2a^3$ ($a \neq 0$) die folgenden Systeme von Polynomen: $x = a + bt^3$, $y = a - bt^3$, $z = -ct^2$, wo b, c beliebige rationale Zahlen mit $6ab^2 = c^3$ sind, im Falle $n = a^3$ die trivialen Lösungen $x + y = 0$, $z = a$ und das von Mahler aufgestellte System $x = 9at^4$, $y = 3at - 9at^4$, $z = a - 9at^3$.

Weber (Berlin).

Niven, Ivan: Sums of fourth powers of Gaussian integers. *Bull. Amer. Math. Soc.* 47, 923—926 (1941).

L'a. poursuit l'étude des propriétés arithmétiques des entiers de Gauss, c'est-à-dire des nombres $a + bi$ (a et b entiers ordinaires). Il vérifie aisément qu'un tel entier n'est une somme de puissances quatrièmes que si le coefficient de i est multiple de 24. — Il démontre que réciproquement cette condition est suffisante et que tout entier $a + 24bi$ est la somme d'au plus 18 puissances quatrièmes. — Il utilise à cet effet une propriété qu'il avait établie précédemment [même périodique, 1940] un entier $a + 2bi$ est une somme de 2 carrés $\alpha^2 + \beta^2$ sauf le cas où b est impair et a double d'un nombre impair. Il remarque que le sextuple du carré d'un tel nombre est la somme des 6 puissances quatrièmes d'après l'identité:

$$6[a + 2bi]^2 = 6(\alpha^2 + \beta^2)^2 = 2(\alpha + \beta)^4 + 2(\alpha - \beta)^4 + (\alpha + \beta i)^4 + (\alpha - \beta i)^4.$$

Les entiers de l'une des deux formes: $48u + 12 + 48vi$, $48u + 36 + (48v + 24)i$ (où u et v sont des entiers réels) sont des sextuples de sommes de 2 carrés de la forme précédente et par suite des sommes de 12 puissances quatrièmes. Mais tout entier $a + 24i$ est égal à un entier de l'une de ces deux formes augmenté de l'un des entiers réels de 1 à 47. L'étude directe de ces 47 entiers montre que chacun d'eux est la somme d'au plus 6 puissances quatrièmes (d'entiers de Gauss) ce qui démontre le théorème.

A. Châtelet (Paris).

● **Ljunggren, Wilhelm:** Einige Sätze über unbestimmte Gleichungen von der Form $Ax^4 + Bx^2 + C = Dy^2$. (Skr. Norske Vid.-Akad., Oslo. I. Mat.-Naturvid. Kl. Nr. 9.) Oslo: Jacob Dybwad 1943. 53 S.

Gewisse diophantische Gleichungen von der Gestalt $Ax^4 + Bx^2 + C = Dy^2$, deren Lösungszahl bereits nach Mordell [Proc. London Math. Soc., II. s. 21, 415—419 (1923)] als endlich bekannt ist, werden in dieser Arbeit zum erstenmal explizit gelöst. Das erste Beispiel bilden die Gleichungen (1) $a^2 x^4 \pm 2ax^2 + 4 = Dy^2$ mit quadratfreien, durch 3 nicht teilbaren natürlichen Zahlen a und D , von denen a ungerade,

$D > 1$ sein muß. Im Körper $K = P(\sqrt{D})$ (P der Körper der rationalen Zahlen) muß $\alpha = ax^2 \pm 1 + y\sqrt{D}$ die Norm -3 haben. Die ganzen Zahlen von K mit dieser Norm sind bekannt und zu zwei passenden unter ihnen assoziiert. Damit ergeben sich vier biquadratische Körper von der Gestalt $K(\sqrt[n]{\xi})$ ($\xi > 0$ in K), in deren einem die Zahl $\vartheta = \frac{1}{2}(ax^2 + y\sqrt{D} + x\sqrt{2a\alpha})$ eine Einheit mit der Relativnorm 1 sein muß. Da sich diese Körper übrigens nicht ändern, wenn man a in (1) durch $3a$ ersetzt, so werden die beiden hierdurch aus (1) entstehenden Gleichungen von nun ab mit (1) simultan behandelt. In dem betreffenden biquadratischen Körper sind alle Einheiten mit der Relativnorm ± 1 Potenzen einer passenden unter ihnen, die ε heiße. Der Ansatz $\vartheta = \varepsilon^n$ führt damit die vier diophantischen Gleichungen auf eine Bestimmungsgleichung für n , nämlich (2) $(\varepsilon^n + \varepsilon'^n \pm 1)(\varepsilon''^n + \varepsilon'''^n \pm 1) = -3$, zurück, in der die Akzente den Übergang zu den verschiedenen Konjugierten bedeuten und beide Male das obere oder beide Male das untere Vorzeichen gilt. Ihr Studium bereitet die eigentliche Schwierigkeit, gelingt aber und liefert in jedem der vier biquadratischen Körper bei jeder Vorzeichenwahl nur endlich viele $n > 0$, im allgemeinen sogar für beide Vorzeichen zusammen höchstens eins, so daß sich für die vier diophantischen Gleichungen zusammen i. a. mittels jedes Körpers höchstens eine, im ganzen also höchstens vier, stets aber nur endlich viele Lösungen in positiven x und y ergeben und diese zugleich angebar werden. Das Verfahren führt dann zu einem ähnlichen Satz über die Gleichungen $a^2x^4 \pm 4ax^2 + 16 = Dy^2$ und die entsprechenden Gleichungen mit $3a$ statt a . An Stelle der Norm -3 tritt lediglich die Norm -12 , so daß das obige ξ halbiert werden muß; wiederum aber kommt es auf die Lösung von (2) an. Der Fall, daß D in (1) durch $3D$ (jedoch a nicht durch $3a$) ersetzt wird, läßt sich simultan mit den Gleichungen $3a^2x^4 \pm 6ax^2 + 4 = Dy^2$ und $3a^2x^4 + 1 = Dy^2$ und den analogen Gleichungen mit $3a$ statt a erledigen. Diesmal muß die α entsprechende Zahl die Norm -1 haben; die biquadratischen Körper reduzieren sich damit auf zwei. Nur ist jetzt eine zusätzliche Adjunktion von $\sqrt[3]{3}$ nötig; aber eine Quadrierung an passender Stelle bewirkt, daß man trotzdem im biquadratischen Körper bleiben kann, wofür dann an Stelle von (2) eine andersartige Relation zwischen Quadratwurzeln aus Einheiten tritt. Auch der bisher verbotene Fall $D = 1$ ordnet sich diesmal ein. Im Falle $D > 1$ ergeben sich für alle betrachteten Gleichungen zusammen, der Körperzahl entsprechend, höchstens zwei, für $D = 1$ jedenfalls nur endlich viele Lösungen in positiven x und y . Auch jetzt bleibt alles im wesentlichen erhalten, wenn man die Glieder mit x^2 verdoppelt, die konstanten Glieder vervierfacht. Mit einem einzigen biquadratischen Körper schließlich kommt man im Fall der Gleichungen $a^2x^4 \pm 2ax^2 + 2 = Dy^2$ und $a^2x^4 + 1 = Dy^2$ aus, wo a und D jetzt ungerade quadratfreie natürliche Zahlen sind, ebenso im Fall der Gleichungen $2a^2x^4 \pm 2ax^2 + 1 = Dy^2$ und endlich im Fall der Gleichungen $8a^2x^4 \pm 4ax^2 + 1 = Dy^2$ und $a^2x^4 + 1 = 2Dy^2$. — Die Lösung der Bestimmungsgleichungen für n ermöglicht auch die Behandlung der diophantischen Gleichungen $x^3 \pm 1 = Dy^2$ und $x^3 \pm 8 = Dy^2$. Die Angabe einer oberen Schranke für die Lösungszahl gelingt immer; unter einfachen Voraussetzungen über D wird die genaue Lösungszahl ermittelt.

Weber (Berlin).

Ljunggren, Wilhelm: Einige Sätze über unbestimmte Gleichungen von der Form $\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$. Norsk mat. Tidsskr. 25, 17–20 (1943) [Norwegisch].

Die diophantische Gleichung

$$(1) \quad \frac{x^n - 1}{x - 1} = y^2 \quad (n > 2, |x| > 1)$$

wird für ungerades n auf eine Gleichung der Form

$$(2) \quad u^2 - Dv^2 = A$$

mit nichtquadratischem $D > 0$ und quadratfreiem, in $2D$ aufgehendem A zurückgeführt. Unter diesen Voraussetzungen über D und A gibt ein Satz von Mahler

(dies. Zbl. 12, 394) diejenigen Lösungen von (2) an, bei denen sämtliche Primteiler von v in D aufgehen. Auf Grund dieses Ergebnisses und eines Satzes von Nagell über die Gleichung (1) [Norsk mat. Forenings Skrifter 1, Nr 3 (1921)] zeigt sich, daß (1) nur die Lösungen $n = 4$, $x = 7$ und $n = 5$, $x = 3$ hat. Unter Benutzung einiger früher von dem Verf. und von Nagell erzielten Ergebnisse, insbesondere zur Behandlung der Gleichung $xh^3 - (x-1)k^3 = 1$ [Nagell, J. Math. pures appl., IX. s. 4, 209 bis 270 (1925)], wird gezeigt, daß die diophantische Gleichung

$$(3) \quad \frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q \quad (n > 2, q > 1, |x| > 1)$$

im Falle $3/n$ nur die Lösungen $n = 3$, $q = 3$, $x = 18$ oder -19 , im Falle $n \not\equiv 5 \pmod{6}$, $q = 3$ nur die Lösungen $n = 3$, $x = 18$ oder -19 hat. Für festes n und q mit $q > 3$, $n \equiv 1 \pmod{q}$ endlich ergibt sich durch Zurückführung auf die Gleichung

$$xh^q - (x-1)k^q = 1$$

rasch aus einem Satz von Siegel [Math. Ann. 114, 57—68 (1937); dies. Zbl. 15, 389], daß (3) nur endlich viele Lösungen hat, sowie auch ein Verfahren zu deren Auffindung.

Weber (Berlin).

Niedermeier, Franz: Ein elementarer Beitrag zur Fermatschen Vermutung. J. reine angew. Math. 185, 111—112 (1943).

Verf. gibt für den von Kummer [J. reine angew. Math. 17, 203—209 (1837)] gegebenen Satz: „Ist λ natürliche Primzahl $\not\equiv 1 \pmod{8}$, so ist $x^{2\lambda} + y^{2\lambda} = z^{2\lambda}$ in natürlichen Zahlen x, y, z , deren keine $\equiv 0 \pmod{2\lambda}$ ist, nicht lösbar“, einen vereinfachten Beweis.

Holzer (Graz).

Bussi, C.: Osservazione sull'ultimo teorema di Fermat. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 5, 42—43 (1942).

Es wird zunächst der Hilfssatz bewiesen: Wenn $n \geq 1$ ganz ist und x, y, z teilerfremde ganze Zahlen mit (1) $x^n + y^n = z^n$ sind, so sind für jedes ganze A die Zahlen $x - A, y - A, z - A$ in ihrer Gesamtheit teilerfremd, und somit kann im Falle $n > 1$ auch nicht

$$(2) \quad x \equiv y \equiv z \pmod{n}$$

sein. Von Pérez-Cacho [Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 3, 273—275 (1928)] ist nun bewiesen worden, daß $\varphi(X^n + Y^n)$ und $\varphi(X^n - Y^n)$ für ganze $n > 0$, X, Y ($X > Y$) stets durch alle Primteiler von n teilbar sind. Auf Grund dieses Satzes wird rasch gezeigt: Wenn n eine Primzahl ist und x, y, z ganze Zahlen mit (1) sind, von denen keine durch n teilbar ist, so gibt es drei Primzahlen p, q, r mit $p/x, q/y, r/z$, $p \equiv q \equiv r \equiv 1 \pmod{n}$. Hieran knüpft Verf. die Bemerkung: Gelingt es bei teilerfremden x, y, z , zu beweisen, daß sich diese Primzahlen p, q, r sogar mit $qx \equiv py \pmod{n}$, $ry \equiv qz \pmod{n}$, $pz \equiv rx \pmod{n}$ wählen lassen, so folgt daraus die verbotene Kongruenz (2) und damit ein Widerspruch.

Weber (Berlin).

Stöhr, Alfred: Berichtigung zu Band 47 (A. Stöhr, Anzahlaberschätzung einer bekannten Basis h -ter Ordnung, S. 778—787). Math. Z. 48, 792 (1943).

Die Anzahlaberschätzung bleibt richtig, jedoch liefert sie nicht, wie vom Verf. angegeben wurde, den Wert der $\sqrt[n]{x}$ -Dichte bzw. der $\sqrt[n]{x}$ -Dichte im Großen für die betrachtete Basis (vgl. dies. Zbl. 26, 202).

Rohrbach (Prag).

Hua, Loo-keng: On the number of partitions of a number into unequal parts. Trans. Amer. Math. Soc. 51, 194—201 (1942).

Verf. stellt eine Reihenentwicklung für die Anzahl $q(n)$ der Zerlegungen der Zahl n in ungleiche Summanden auf, welche ein Analogon zur Entwicklung der „partitio numerorum“ $p(n)$ von Rademacher ist (vgl. dies. Zbl. 17, 55). Verwendet wird die Hardy-Littlewoodsche Methode unter Benützung von Kloosterman-Summen und der „Farey-Zerschneidung unendlicher Ordnung“ von Rademacher. E. Hlawka.

● Selberg, Sigmund: Über die Verteilung einiger Klassen quadratfreier Zahlen, die aus einer gegebenen Anzahl von Primfaktoren zusammengesetzt sind. (Skr. Norske Vid. Akad., Oslo. I. Mat.-Naturvid. Kl. Nr. 5.) Oslo: Jacob Dybwad 1942. 49 S.

Im folgenden sei n eine natürliche Zahl, $2 \leq \xi \leq x$, $\sigma = \log \xi / \log x$. Der Buchstabe m bedeutet quadratfreie Zahlen, die genau n Primfaktoren enthalten. P_m sei der größte Primfaktor von m . $\pi_n(x)$ sei die Anzahl der $m \leq x$; $\pi_{\nu, n}(\xi, x)$ sei die Anzahl derjenigen $m \leq x$, die genau ν Primfaktoren enthalten, welche $\leq \xi$ sind, also $\pi_n(x) = \pi_{n, n}(\xi, x) + \dots + \pi_{0, n}(\xi, x)$. — I. Verf. verschärft das Landausche Ergebnis $\pi_n(x) \sim \frac{x(\log \log x)^{n-1}}{(n-1)! \log x}$ (einen Beweis siehe auch bei Verf., Über die zahlen-theoretische Funktion $\pi_n(x)$ [Norske Vid. Selsk., Forh. 13, 30–33 (1940)]) zu

$$(1) \pi_n(x) \cdot \frac{\log x}{x} = \sum_{\nu=1}^n \frac{a_\nu}{(n-\nu)!} (\log \log x)^{n-\nu} + O((\log \log x)^{-q}) \text{ (für jedes } q). \text{ Dabei hängt}$$

jedes a_ν nur von ν (also weder von x noch von n) ab. Zum Beweis werden zunächst analoge Abschätzungen für die $\pi_{\nu, n}(\xi, x)$ bei geeignetem ξ abgeleitet, woraus dann (1) durch Summation folgt. (Man beschränkt sich auf solche ξ , für welche $0 < g \leq \sigma \leq \frac{1}{n}$

ist; g eine beliebige positive Konstante.) Die Abschätzungen für $\pi_{\nu, n}(\xi, x)$ werden als Spezialfall folgender allgemeineren Untersuchung erhalten: Es sei eine Folge von Funktionen $A_i(\xi, x)$ ($i = 1, 2, \dots$) gegeben; es sei

$$(i-1)A_i(\xi, x) = \sum_{p \leq \xi} \left(A_{i-1}\left(\xi, \frac{x}{p}\right) - A_{i-2}\left(\xi, \frac{x}{p^2}\right) + \dots \right),$$

$$A_1(\xi, x) \frac{\log x}{x} = f(\sigma) + O((\log \log \xi)^{-q})$$

für jedes q , und zwar gleichmäßig in σ in einem Intervall $0 < g \leq \sigma \leq G$; $f(z)$ sei regulär für $0 < |z| < \rho$, $G < \text{Min}(1, \rho)$; gesucht wird ein asymptotischer Ausdruck für $A_i(\xi, x)$, der für $0 < g \leq \sigma \leq G$, $\frac{\rho}{1+(i-1)\rho}$ gilt. — II. Die interessantesten

Resultate über $\pi_{\nu, n}(\xi, x)$ bekommt man, wenn man den (in I ausgeschlossenen) Fall betrachtet, daß σ nahe an 0 oder 1 liegt. Es sei also ξ (also auch σ) irgendwie als Funktion von x gegeben. Dann gilt: 1. Ist $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1-\sigma)}{\log \log x} \leq -1$ (also $\sigma \rightarrow 1$), so ist $\pi_{n, n}(x^\sigma, x) \sim \pi_n(x)$, $\pi_{0, n}(x^{1-\sigma}, x) \sim \pi_n(x)$. — 2. Ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1-\sigma)}{\log \log x} = -\beta$ ($0 < \beta < 1$, also wiederum $\sigma \rightarrow 1$), so ist $\pi_{n, n}(x^\sigma, x) \sim (1 - (1 - \beta)^{n-1}) \pi_n(x)$,

$\pi_{n-1, n}(x^\sigma, x) \sim (1 - \beta)^{n-1} \pi_n(x)$, $\pi_{n-\nu, n}(x^{1-\sigma}, x) \sim \binom{n-1}{\nu-1} \beta^{\nu-1} (1 - \beta)^{n-\nu} \pi_n(x)$ für $\nu = 1, 2, \dots, n$. — 3. Ist endlich (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \sigma}{\log \log x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1-\sigma)}{\log \log x} = 0$, so ist

$\pi_{n-1, n}(x^\sigma, x) \sim \pi_n(x)$. Also insbesondere: Im Falle 3 ist $P_m > x^\sigma$ für fast alle $m \leq x$; dabei kann σ sehr nahe an 1 liegen, nur so, daß (2) erfüllt ist; z. B. kann man für σ jede Konstante α mit $0 < \alpha < 1$ setzen (für konstantes σ wird ein einfacherer älterer Beweis des Verf. mitgeteilt [vgl. auch dies. Zbl. 26, 298]). — III. Es sei $C_n(x) = \sum_{m \leq x} m^{-1}$;

man kann auch $C_n(x)$ analog wie $\pi_n(x)$ als eine Summe $C_{n, n}(\xi, x) + \dots + C_{0, n}(\xi, x)$ darstellen und dann die $C_{\nu, n}(\xi, x)$ nach der Methode von I abschätzen, woraus eine Abschätzung von $C_n(x)$ folgt. Diese wird aber einfacher so bewiesen, daß man direkt die Gleichung (3) $\pi_n(x) \frac{\log x}{x} = C_{n-1}(x) + O\left(\frac{(\log \log x)^{n-1}}{\log x}\right)$ beweist. — IV. Zum Schluß

bemerkt Verf. folgendes: In den Abschätzungen von $\pi_{\nu, n}(\xi, x)$, $C_{\nu, n-1}(\xi, x)$ treten in den Hauptgliedern gewisse Funktionen von σ auf (die rekurrent durch gewisse Integrale definiert sind). Aus den Untersuchungen in I, III und aus (3) ergeben sich gewisse Eigenschaften dieser Funktionen, die also durch einen Umweg über den Primzahlsatz

abgeleitet worden sind (welcher in dieser Arbeit benutzt wird), obwohl die Funktionen selbst nichts mit den Primzahlen zu tun haben. Verf. bemerkt, daß es ihm nicht gelungen ist, diese Eigenschaften direkt zu beweisen. *Jarník (Prag).*

Weyl, Hermann: *Theory of reduction for arithmetical equivalence.* 2. Trans. Amer. Math. Soc. **51**, 203—231 (1942).

Für Teil I vgl. dies. Zbl. **24**, 148. — Der Hauptinhalt der Arbeit besteht darin, die fundamentalen Ungleichungen aus der Geometrie der Zahlen und den Satz von der Endlichkeit der Klassenzahl in allgemeinerer Form abzuleiten. Es sei J ein algebraischer Zahlkörper vom Grad f über dem Körper K_0 der rationalen Zahlen, E^n sei der n -dimensionale Vektorraum über J . $[J]$ sei eine Ordnung von J ; $\sigma_1, \dots, \sigma_f$ eine Basis von $[J]$. Es sei Λ ein Gitter, das zu dieser Ordnung gehört und das Einheitsgitter I von $[J]$ enthält. Dann sei $j = [\Lambda : I]$ die Anzahl der mod I inkongruenten Vektoren aus Λ . Es sei $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ eine Maßfunktion ($\xi = x_1\sigma_1 + \dots + x_f\sigma_f$, x_i rational). Sie heißt reduziert bez. Λ , wenn $f(\xi_1, \dots, \xi_n) \geq f(e_{1k}, \dots, e_{nk}) = M_k$ für jedes (ξ_1, \dots, ξ_n) aus Λ_k . Dabei ist Λ_k die Menge der Vektoren (ξ_1, \dots, ξ_n) in Λ , für die $(\xi_k, \dots, \xi_n) \neq (0, \dots, 0)$. Es sei θ Erzeugende von J/R_0 , θ^α seien die reellen, $\theta^\beta, \bar{\theta}^\beta$ die komplexen Konjugierten von θ ($\alpha = 1, \dots, r$, $\beta = 1, \dots, s$, $r + 2s = f$). Jeder Zahl ξ aus J werden die f Koordinaten $x^\alpha, x_0^\beta, x_1^\beta$ zugeordnet, wobei $x^\alpha = \xi^\alpha$; $x_0^\beta + i x_1^\beta = \xi^\beta$. Es sei $\xi^* = x_1\sigma_1 + \dots + x_f\sigma_f$, x_i reell. Die zugeordneten Koordinaten $x^\alpha, x_0^\beta, x_1^\beta$ sind mit den Komponenten x_1, \dots, x_f von ξ^* durch eine Substitution mit der Determinante Δ verbunden. Es sei V das Volumen des Körpers $f(\xi_1^*, \dots, \xi_n^*) < 1$, bezogen auf die den ξ_i^* zugeordneten Koordinaten. Dann gelten die Ungleichungen:

$$(M_1 \cdot \dots \cdot M_n)^f \cdot V \cdot [\Lambda : I] \leq (2^f \Delta)^n,$$

$$j = [\Lambda : I] \leq (nf)! \left(\frac{4}{\pi}\right)^{ns} \left(\frac{\Delta}{f!}\right)^n.$$

Es ergibt sich ferner der fundamentale Satz, daß die Anzahl der Klassen von Gittern, die zu einer gegebenen Ordnung gehören, endlich ist. Insbesondere werden quadratische und hermitesche Formen betrachtet, und es ergeben sich schärfere Ergebnisse als im ersten Teil der Arbeit. Die Untersuchungen werden auch auf Quaternionenalgebren ausgedehnt. Zuletzt wird der Koeffizientenraum der positiven hermiteschen Formen einfach und lückenlos in Zellen hinsichtlich der Modulgruppe eingeteilt, und es werden weitere Sätze über die Anordnung und den Bau der Zellen abgeleitet.

Hofreiter (Berlin).

Rédei, László: *Über Gitterparallelogramme.* Mat. fiz. Lap. **49**, 73—75 u. dtsh. Zusammenfassung 75 (1942) [Ungarisch].

Neben die elementargeometrischen Beweise von P. Veress und Ref. (dies. Zbl. **26**, 104) stellt hier Verf. zwei elementare arithmetische Beweise des Satzes, daß der Inhalt eines halboffenen Gitterparallelogrammes der Anzahl der enthaltenen Gitterpunkte gleich ist. Sie benutzen die Matrix der Differenzen entsprechender Eckpunktkoordinaten und bringen diese durch geometrisch gedeutete Reihen- bzw. Spaltenadditionen auf eine Form, die mindestens eine Null enthält und so eine direkte Bestätigung der Behauptung gestattet. Die Beweismethoden sind unmittelbar auch auf das n -dimensionale Analogon des Satzes anwendbar. *G. Hajós (Budapest).*

Teghem, Jean: *Sur l'application de la théorie des sommes de Weyl à des problèmes d'inégalités diophantiennes.* Bull. Soc. Roy. Sci., Liège **11**, 4—6 (1942).

• En utilisant les résultats récents de Vinogradov-van der Corput au lieu des théorèmes antérieurs de Weyl-van der Corput, l'a. obtient des améliorations intéressantes des résultats du Réf. dans la théorie des inégalités diophantiques (Thèse, Groningue 1930). L'a. considère quelques exemples. Un exposé complet des théorèmes généraux sera publié ultérieurement. *J. F. Koksma (Amsterdam).*

Analysis.

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

Rios, Sixto: Vorlesungen über die Theorie des Integrals. Rev. Acad. Ci. exact. Madrid 36, 10—49, 307—354 u. 418—481 (1942) [Spanisch].

Verf. veröffentlicht hier eine vollständige Ausarbeitung seiner Vorlesungen über Integrationstheorie. Die klare und übersichtliche Darstellung wird jeweils durch Abschnitte unterbrochen, die weiterführende Aufgaben und Zusätze enthalten. Das Schrifttum ist bis in die neueste Zeit verarbeitet, soweit es sich in den Rahmen der Vorlesungen fügte. Inhalt: Mengen, Mächtigkeiten; Maßtheorie; Lebesguesches Integral, ältere Integralbegriffe; meßbare Funktionen; Eigenschaften des L -Integrals einer beschränkten Funktion. Vertauschung von Integration und Grenzübergang, Integration unbeschränkter Funktionen, summierbare Funktionen. Borelsches Maß, Bairesche Klassen; mehrfache L -Integrale. Die Integralbegriffe von Young, Borel, Rieß, Tonelli. Funktionen beschränkter Schwankung; Ableitung derselben, das unbestimmte Integral, seine Kennzeichnung als totalstetige Funktion. Integration der Ableitung, Teilintegration, Mittelwertsätze. Das Denjoysche Integral nach Romanowski, Perronsches Integral, Stieltjessches Integral. Lineare Funktionale und der Darstellungssatz von Rieß. Ausdehnung der Theorie auf abstrakte Räume.

Harald Geppert (Berlin).

Ostrowski, Alexandre: Notes sur l'interversion des dérivations et les différentielles totales. Comment. math. helv. 15, 222—226 (1942).

I. $f(x_1, \dots, x_n)$ besitzt im Punkt $P_0(a_1, \dots, a_n)$ genau dann ein totales Differential, wenn f nach jedem x_ν im Punkt P_0 gleichmäßig differenzierbar ist. — Dabei heißt f z. B. nach x_1 gleichmäßig differenzierbar im Punkt P_0 , wenn

$$\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(a_1, x_2, \dots, x_n)}{x_1 - a_1}$$

für $x_1 - a_1 \rightarrow 0$, $|x_\nu - a_\nu| \leq |x_1 - a_1|$ ($\nu = 2, \dots, n$) einen Limes $f_{x_1}(a_1, \dots, a_n)$ hat.

II. Wenn $f(x, y)$ in der Umgebung von $P_0(a, b)$ Ableitungen f_x, f_y hat und wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_x}{\partial y}, \frac{\partial f_y}{\partial x}$ im Punkt P_0 gleichmäßig existieren, so ist an dieser Stelle $f_{xy} = f_{yx}$.

Kamke (Tübingen).

Coulson, C. A.: Two-centre integrals occurring in the theory of molecular structure. Proc. Cambridge Philos. Soc. 38, 210—223 (1942).

In der Atomphysik werden häufig Integrale der folgenden Bauart benötigt: Gegeben sind zwei feste Zentren A, B mit $AB = \varrho$; ein veränderlicher Punkt P wird durch die sphärischen Polarkoordinaten r_a, θ_a, φ_a bzw. r_b, θ_b, φ_b mit den Zentren A bzw. B festgelegt, wobei θ_a, θ_b von der Geraden AB ab gemessen werden. Berechnet werden über den ganzen Raum erstreckte Volumintegrale ($d\tau = \text{Volumenelement}$), in deren Integranden $\exp(-\alpha r_a - \beta r_b)$ (α, β Konstanten) mit niedrigen Potenzen von r_a, r_b und $\cos \theta_a, \cos \theta_b, \sin \theta_a, \sin \theta_b$ multipliziert ist. Die Tabelle umfaßt die Werte von 43 solchen Integralen, z. B.

$$\int (r_a r_b)^{-1} \exp(-\alpha r_a - \beta r_b) d\tau = \frac{4\pi}{e(\alpha^2 - \beta^2)} (e^{-\beta \varrho} - e^{-\alpha \varrho})$$

samt ihren Ausartungen im Falle $\alpha = \beta$.

Harald Geppert (Berlin).

Praktische Analysis:

● **Tölke, Friedrich:** Praktische Funktionenlehre. Bd. 1: Elementare und elementare transzendente Funktionen (Unterstufe). Berlin: Springer 1943. VII, 261 S. u. 62 Abb. RM. 16.20.

Das auf 6 Bände veranschlagte Werk will ein möglichst vollständiges Lehr- und Nachschlagebuch der praktischen Funktionenlehre bieten, das den praktischen Mathe-

matiker, Physiker und Ingenieur weitgehend von Formel- und Zahlenrechnungen entlastet. Man wird diesen Plan, durch den die vorhandenen verstreuten Zahlen-, Formel- und Integraltabellen nach der Tiefe und vor allem der Breite hin ergänzt und zusammengefaßt werden, gerade in der jetzigen Zeit lebhaft begrüßen. — Der vorliegende erste Band behandelt in einem ersten Abschnitt die elementaren Funktionen: e^x , $\ln x$, x^a , Kreis- und Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrungen, im zweiten Abschnitt die durch elementare und die genannten Funktionen ausdrückbaren unbestimmten Integrale und gibt schließlich im dritten Abschnitt Tafeln der elementaren Transzendenten sowie der Funktionen (*) $Ei(\pm x)$, $Si(x)$, $Ci(x)$, $\text{Si}(x)$, $\text{Ci}(x)$. 31 vollständige, der Technik und Physik entnommene Aufgaben erläutern die Anwendungsbereiche der Theorie. Im einzelnen ist hervorzuheben: Die Theorie der Funktionen wird vollständig entwickelt; dabei werden in der Form gleich die Bedürfnisse des Praktikers berücksichtigt, z. B. alle Formeln für $e^{\omega z}$, $\sin \omega z$ usw. geschrieben. Die häufig vorkommenden Kreisfunktionen mit der Phase $\pi/4$ erfahren ebenso wie die Amplitudenfunktion $\text{Amp } z = 2 \arctan e^z - \frac{\pi}{2}$ eine gesonderte Behandlung; sämtliche Querverbindungen unter den Funktionen sowie ihr Zusammenhang mit den hypergeometrischen Funktionen werden entwickelt. Der Integration der linearen Diffgl. 2. und 4. Ordnung sowie der Systeme solcher durch die angegebenen Funktionen ist breiter Raum gewidmet. Die rund 90 Seiten umfassenden Integraltabellen dürften an Vollständigkeit nicht zu überbieten sein; natürlich ist bei dem ungeheuren hier niedergelegten Formelmateriale die Hauptschwierigkeit die einer übersichtlichen Klasseneinteilung; hier wird sich vielleicht mehr erreichen lassen. Die mit großer Sorgfalt behandelten Tafeln schreiten nach x fort und geben für $x = 0$ bis 1 in Schritten von 0,001 die Werte von $2\pi x$, $\sin 2\pi x$, $\cos 2\pi x$, $\tan 2\pi x$, $\cotan 2\pi x$ und der um $\pi/4$ phasenverschobenen Funktionen auf 5 Dezimalen, zu $x = 0$ bis 40 in Schritten von 0,01 die Werte von $\frac{\pi}{2} x$, $\exp\left(\pm \frac{\pi}{2} x\right)$, $\sin \frac{\pi}{2} x$, $\cos \frac{\pi}{2} x$ und zu $x = 0$ bis 5 in gleichen Schritten die Werte der Funktionen (*).

Die Frage, ob die gewählte Breite des Formelmateriale wirklich erforderlich ist, muß der Praktiker prüfen. Jedenfalls geht das Werk auch den Mathematiker an, der vor allem an den geplanten folgenden Bänden größtes Interesse hat. Wenn daher im folgenden eine Reihe von Mißlichkeiten erörtert werden, so soll dies nicht der Gesamtbeurteilung des Werkes Abbruch tun, sondern nur zum Hinweis dienen, wie wichtig gerade in den folgenden Bänden eine kritische Überprüfung des Manuskripts vom funktionentheoretischen Gesichtspunkt aus ist, wenn ein wirklich einwandfreies und völlig zuverlässiges Werk, wie es benötigt wird, entstehen soll. — Gleich auf S. 2 wird die in $|z| < 1$ konvergente Reihe für $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ mit der in $|z-1| < 1$ geltenden für $F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; 1-z)$ additiv zusammengesetzt und behauptet, das Ergebnis sei brauchbar im ganzen Einheitskreis. Auf S. 22 (111) finden sich die (zur Not richtig zu deutenden) Beziehungen $\lim_{z \rightarrow +\infty} \text{Co}z = \lim_{z \rightarrow +\infty} \text{Si}z$, $\lim_{z \rightarrow -\infty} \text{Co}z = - \lim_{z \rightarrow -\infty} \text{Si}z$, und auf S. 26 die Bemerkung, daß dementsprechend $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \text{Tang } z = \pm 1$ ist; dies ist der einzige „Beweis“ dieser Beziehung. Verf. schreibt, wie üblich, $\int z^{-1} dz = \ln|z|$ und sieht sich bei der Integration rationaler Funktionen S. 111 gezwungen, diese Formel auch im Komplexen anzuwenden, also $\int (z-a)^{-1} dz = \ln|z-a|$ auch für komplexe a ! Dafür wird auf der gleichen Seite erklärt:

$$\ln|(z-a_1) + ia_2| = \ln\sqrt{(z-a_1)^2 + a_2^2} + i \arccotang \frac{z-a_1}{a_2},$$

und alles geht wieder in Ordnung! S. 6, 1. Z. v. u.: Der Verlauf von $\log z$ ist nur für positives Argument wiedergegeben. Von S. 12 an findet sich häufig die irreführende Schreibweise

$$\int_{z_1}^z \int_{z_0}^z w(\zeta) d\zeta d\zeta \quad \text{statt} \quad \int_{z_1}^z \int_{z_0}^t w(\zeta) d\zeta dt.$$

Auf S. 28f werden die arc-Funktionen behandelt; obwohl Verf. der Mehrdeutigkeit nicht durch Heraussonderung eines Zweiges Rechnung trägt, schreibt er die Ableitungsformeln: $(\arccos z)' = -(1 - z^2)^{-1/2}$ usw. Dasselbe gilt von der Verwendung mehrdeutiger Funktionen im folgenden, zumal sie auch im Komplexen angewandt werden: genaue Zweiganzeige ist unerlässlich. Der Parallelismus zwischen Kreis- und Hyperbelfunktionen wird nicht überall ausgenutzt; warum löst Verf. auf S. 42 die Diffgl. $w'' + aw' + bw = 0$ im Falle $a < 2\sqrt{b}$ in Kreis-, im Falle $a > 2\sqrt{b}$ in exp-Funktionen? Warum erscheint S. 50 die Lösung von $w^{(4)} + w = 0$ mit acht Integrationskonstanten? Beiläufig einige Druckfehler, die sich ja nie ganz vermeiden lassen: S. 29, Z. 7 v. u. $\text{Ar Sin } z = \int \frac{dz}{\sqrt{z^3 + 1}}$; S. 76, Z. 1 v. u. $\int \frac{z^2 dz}{(a + bz)^3}$; S. 84, Z. 12 v. u. $\lambda \neq -1, \dots, -(n+1)$; S. 112, Z. 5 v. u. fehlt Klammer; S. 126, Z. 10 v. o. Radikand statt Integrand.

Die folgenden Bände werden die Kugel-, Zylinder- und hypergeometrischen sowie die elliptischen und Thetafunktionen zum Inhalt haben. *Harald Geppert* (Berlin).

Collatz, L.: Fehlerabschätzung für das Iterationsverfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme. Z. angew. Math. Mech. 22, 357—361 (1942).

Das zur approximativen Auflösung eines linearen Gleichungssystems

$$A\mathfrak{x} = \mathfrak{r} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{A} = (a_{ik})$$

dienende „Iterationsverfahren in Einzelschritten“ besitzt die folgende Gestalt:

$$x_i^{(\nu+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ r_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k^{(\nu+1)} - \sum_{k=i+1}^n a_{ik} x_k^{(\nu)} \right\}.$$

Die Konvergenz dieses Verfahrens ist für die numerische Rechnung nur dann rasch genug, wenn die Hauptdiagonalelemente a_{ii} die übrigen Elemente a_{ik} genügend stark überwiegen (s. u.). Für den Fall, daß die Elemente a_{ii} diese Bedingung erfüllen, gibt Verf. folgende Fehlerabschätzung an:

$$\begin{aligned} & |x_i^{(\nu+1)} - x_i| \leq \varrho \delta^{(\nu)}, \\ \text{wobei} \quad \varrho = \max_i \frac{b_i}{|a_{ii}| - b_i} \quad \text{und} \quad b_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{ik}| < |a_{ii}| \end{aligned}$$

ist. $\delta^{(\nu)}$ bedeutet dabei den Betrag der maximalen Änderung beim letzten Iterationsschritt, also $\delta^{(\nu)} = \max_i |x_i^{(\nu+1)} - x_i^{(\nu)}|$. Ferner zeigt Verf. am Beispiel eines Gleichungssystems von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, daß durch die Gaußsche Transformation, die das vorgelegte durch linksseitige Multiplikation mit der transponierten Matrix \mathfrak{A}' in ein neues System

$$\mathfrak{B}\mathfrak{x} = \mathfrak{s} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{A}'\mathfrak{A} \quad \text{und} \quad \mathfrak{s} = \mathfrak{A}'\mathfrak{r}$$

überführt, nicht immer ein starkes Überwiegen der Hauptdiagonalelemente erzielt werden kann.

Wegner (Heidelberg).

Rehbock, F.: Zur Konvergenz des Newtonschen Verfahrens für Gleichungssysteme. Z. angew. Math. Mech. 22, 361—362 (1942).

Das zu lösende Gleichungssystem besitzt die Gestalt

$$g_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

Dabei sind g_ν Funktionen des Vektors $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung. Bezeichnet \mathfrak{g} den Vektor mit den Komponenten g_1, g_2, \dots, g_n und wird zur Abkürzung

$$\frac{\partial g_\nu}{\partial x_\lambda} = g_{\nu, \lambda}, \quad \text{Matrix } (g_{\nu, \lambda}) = \mathfrak{G},$$

$$\mathfrak{x}_\nu = (x_{\nu 1}, \dots, x_{\nu n}), \quad \mathfrak{g}(\mathfrak{x}_\nu) = \mathfrak{g}_\nu, \quad \mathfrak{G}^{-1}(\mathfrak{x}_\nu) = \mathfrak{G}_\nu^{-1}$$

gesetzt, so läßt sich das Newtonsche Iterationsverfahren durch die Rekursionsformel $\mathfrak{x}_{\nu+1} = \mathfrak{x}_\nu - \mathfrak{G}_\nu^{-1} \mathfrak{g}_\nu$ darstellen. — Verf. zeigt, daß das Verfahren konvergiert, falls

die Ausgangslösung x_0 die wahre Lösung x schon „genügend“ approximiert (dies wird mathematisch präzisiert). Neben anderen Konvergenzbedingungen gibt er unter Voraussetzung der Existenz einer Lösung auch eine Fehlerabschätzung sowie weitere Sätze über die Existenz einer Lösung an. (Die Arbeit ist ein Auszug einer Dissertation von K. Bussmann, die an der Technischen Hochschule Braunschweig angefertigt worden ist. In vorliegender Mitteilung sind die Sätze ohne Beweis angegeben.)

Wegner (Heidelberg).

Abramescu, N.: Anwendung der Geometrie auf die Diskussion und Trennung der Wurzeln einer Gleichung. Gaz. mat. 48, 395—400 (1943) [Rumänisch].

Zur zeichnerischen Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung empfiehlt sich deren Auflösung nach einem in ihr enthaltenen konstanten Parameter in der Form $P(x) = k$ und Schnitt der Kurven $y = P(x)$ und $y = k$. Anwendung zur Anzahlbestimmung von Wurzeln. Harald Geppert (Berlin).

Egger, Hans: Praktische Interpolation. Z. angew. Math. Mech. 22, 362—364 (1942).

Zur Interpolation der trigonometrischen Funktionen schlägt Verf. Anwendung des Additionstheorems vor, wozu das Argument additiv so zerspalten wird, daß die erforderlichen Funktionswerte aus Tafeln oder durch einfache Entwicklung zur Verfügung stehen. Beispiel: $\sin 3,5472398$; \sin und $\cos 3,54$ nach grober, \sin und $\cos 0,0072$ nach feiner Hayashi Tafel, ferner $\sin 398 \cdot 10^{-7} \approx 398 \cdot 10^{-7}$ und $\cos 398 \cdot 10^{-7} \approx 1$; zuerst werden \sin und $\cos 0,0072398$ aufgebaut. Wörtlich ebenso geht man bei der Exponentialfunktion vor. Das Verfahren arbeitet rascher als die Benutzung von Interpolationspolynomen höheren Grades. Die zur Interpolation von \arcsin , \arccos , ArSin und ArCos vorgeschlagenen Verfahren sind mit quadratischer Taylorapproximation identisch. Kontrolle der Formeln für die Interpolation von arctg und ArTg mittels Taylorreihe zeigt, daß der Nenner 2 durch 3 ersetzt werden muß, damit Übereinstimmung bis zum kubischen Glied besteht. Der natürliche Logarithmus wird mit Taylorentwicklung in besonderer Anordnung interpoliert. Theodor Zech (Dessau).

Knobloch, H.: Zur Interpolation von Kurvenscharen. Z. angew. Math. Mech. 22, 364—366 (1942).

Es werden verschiedene Verfahren zur Bestimmung von Kurvenscharen, deren Einzelkurven nur durch umständliche und zeitraubende Rechengänge zu gewinnen sind, besprochen. Das Aufsuchen der übrigen Kurven der Schar durch Interpolation zwischen gewissen, sorgfältig ermittelten Grundkurven erfolgt nach Sauer (dies. Zbl. 24, 267) durch Zwischenschaltung eines geeigneten, mit dem ursprünglichen durch affine Transformation verknüpften Koordinatensystems. Der Haupteinfluß der beiden Grundparameter wird hierbei getrennt erfaßt und Funktionen von zwei Veränderlichen kommen nur zu Korrekturzwecken vor. In vielen Fällen ist aber die Abhängigkeit einer Funktion von ihren Parametern schon in guter Näherung bekannt. Dann lassen sich vorteilhaft auch solche einfacher gebaute Transformationen zwischen der Originalebene (x, y) und der Interpolationsebene (ξ, η) verwenden, die in x und y bzw. ξ und η nicht mehr linear sind. Verf. zeigt, daß ein bereits erprobtes, nicht notwendig affines Verfahren unter Umständen günstigere Umrechnungen liefert. Als Beispiele werden Interpolationsnetze für den Bombenwurf aus dem Horzontalfallflug und dem Sturzflug herangezogen. Garten (Leipzig).

Willers, Fr. A.: Integriermaschinen. (J 081-11.) Arch. techn. Messen Liefg 143 (1943).

Umfangreiche Maschinen zur Lösung auch verwickelter gewöhnlicher Differentialgleichungen wurden von V. Bush konstruiert — von ihm Differentialanalysatoren genannt — und von Hartree, Rosseland u. a. nachgebaut. Die Maschinen enthalten als Hauptbestandteile Funktionstische, Integriermechanismen, Additions- und Multiplikationsgetriebe. Diese Teile werden mit Hilfe von Kopplungen, Drehmomentverstärkern und Kompensatoren beliebig kombinierbar gemacht. Prinzipskizzen, Ansichten, Beispiele, Literatur. Theodor Zech (Dessau).

Nyström, E. J.: Zur praktischen Integration von linearen Differentialgleichungen. Soc. Sci. Fennica. Comment. phys.-math. 11, Nr 14, 1—14 (1943).
Zur angenäherten Lösung des Randwertproblems

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \alpha(x)z + \beta(x) = 0, \quad z(x_a) = z_a, \quad z(x_b) = z_b$$

wird dieses auf die Form $\frac{d^2 y}{ds^2} + \bar{\alpha}(s)y + \bar{\beta}(s) = 0$, $y(-\frac{1}{2}) = y(\frac{1}{2}) = 0$ transformiert und mit Hilfe der Greenschen Funktion eine zugehörige lineare Integralgleichung vom Fredholmschen Typus aufgestellt. Die Lösung $y(s)$ wird durch ein Interpolationspolynom vierten Grades angenähert und ein Gleichungssystem von drei linearen Gleichungen für drei Unbekannte y_1, y_2, y_3 (Näherungen für die exakten Werte von y an den Stellen $-\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}$) aufgestellt. Das Verfahren wird in ein festes übersichtliches Schema gebracht und an drei Beispielen ausführlich erläutert. Der Gedanke, besondere Zwischenordinaten $s = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4}}$ und $s = 0$ nach Gauss-Lobatto zu verwenden, führt hier zu keiner lohnenden Genauigkeitssteigerung. Collatz (Karlsruhe).

Parodi, Hippolyte, et Maurice Parodi: Méthode d'intégration par arcs successifs des équations de relaxation. C. R. Acad. Sci., Paris 215, 268—270 (1942).

Dans le but de construire une solution approchée de l'équation de relaxation

$$(1) \quad yy' + yf(x) + x = 0,$$

les aut. découpe le domaine de variation de x en un certain nombre de sections. En choisissant dans chacune de ces sections une valeur constante pour $f(x)$, ils ramènent la solution de l'équation (1) à la solution d'un certain nombre d'équations différentielles connues (voir p. ex. E. Kamke, Differentialgleichungen, Leipzig 1942; ce Zbl. 26, 318; p. 329), de la forme $yy' + ay + x = 0$. — Pour le calcul effectif, il suffit de construire une fois pour toutes les tables d'une certaine fonction auxiliaire indiquée par les aut.

D. Mangeron (Cernăuți).

Klassische theoretische Physik.

● Heisenberg, Werner: Wandlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaft. 3., erw. Aufl. Leipzig: Hirzel 1942. 95 S. RM. 3.50

Mechanik:

● Haag, J.: Cours complet de mathématiques spéciales. T. 3. Mécanique. 2. édit. Paris: Gauthier-Villars 1940. VIII, 188 pag. ff. 70.—

● Taschenbuch für Bauingenieure. Hrsg. v. Ferdinand Schleicher. Mit Beiträgen von A. Agatz, K. Beyer, A. Bloss, P. Böss, F. Dischinger, W. Flügge, J. Göderitz, O. Graf, E. Marquardt, W. Müller, R. Niemeyer, W. Paxmann, H. Petermann, C. Pirath, K. Risch, W. Rosemann, F. Schleicher, W. Stoy, F. Tölke, A. Vierling, P. Werkmeister, R. Winkel u. H. Wittmann. Berlin: Springer 1943. XXIII, 1942 S. u. 2403 Abb. geb. RM. 29.70.

Hier werden nur die Abschnitte 1—5 und 7 des Buches besprochen. — W. Rosemann, Mathematik. Rechenschieber, Nomogramme, Ausgleichsrechnung, Streuung von Meßergebnissen, Determinanten, Nullstellen algebraischer Gleichungen, Differentialrechnung, Integralrechnung, gewöhnliche Differentialgleichungen, rationale Funktionen, Umformen von Quadratwurzeln, elliptische Integrale und Funktionen, Integralsinus, Integralcosinus, Integrallogarithmus, Fresnelsche Integrale, Fehlerintegral, Besselsche Funktionen, Reihen, Bernoullische Zahlen, Kugelfunktionen, Geometrie. Anm. d. Ref.: S. 6, 2. Zeile v. u. statt $[x^2]$ muß steheu $[x]^2$. Um auf S. 9 die in Tab. 3 gegebenen Werte von $100 \frac{q^n - 1}{q^n - 1}$ berechnen zu können, muß die vorhergehende Tabelle die Werte von q^n mit größerer Genauigkeit geben, z. B. für $p = 4$ und $n = 10$ genügt nicht 1,480, sondern 1,48024. Auf S. 17 wird nicht in 10,3, sondern die Ordinate einer kubischen Parabel berechnet. Soll (S. 30) ln 1,6 aus der Integraldarstellung nach der Simpsonschen Regel berechnet werden, so wird der Ersatzfehler nicht mit dem arithmetischen Mittel der 4. Differenzen, sondern mit dem größten absoluten Betrage des

3. Differentialquotienten oder mit dem 4. Differentialquotienten abgeschätzt. S. 31 $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{tg} x}{x} dx$

ist sinnlos; in $\int_0^{\pi} \ln \cos x dx = -\pi \ln 2$ fehlen neben $\cos x$ die Absolutstriche. Bei der Taylor-schen Reihe (S. 57) $f(x) = f(a) + \dots$ ist im Restglied die untere Grenze a statt 0. In Abb. 80 (S. 65) müssen die Vorzeichen von v umgekehrt werden. Die Mantelfläche des schrägen Kreiszylinders (S. 72), dessen Mantelgeraden mit den Kreisebenen den Winkel α bilden, ist nicht $2\pi rh$, sondern $4 \frac{hr}{\sin \alpha} E\left(\frac{\pi}{2}, \cos \alpha\right)$. Die Stromlinien des Vektors $\operatorname{grad} \varphi(x, y, z)$ (S. 76) stehen nicht auf den Schichtlinien, sondern auf den Äquipotentialflächen senkrecht.

F. Tölke, Mechanik starrer Körper. Punktbewegung, Tangential- und Zentripetalbeschleunigung, Führungs-, Coriolis- und Relativbeschleunigung bei allgemeiner Körperbewegung, kinematische Ketten, Energiesatz (Bremsweg eines Fahrzeugs), Impulsatz (Höhe des Wechselsprungs, Kraft am Rohrkrümmer), elastischer Stoß (Laufkatze gegen Pufferfedern, auf Träger fallende Last), plötzliche Be- und Entlastung (Entleerung einer Betonkübelkatze, die auf Trageil verfahren wird), Impulsmomentensatz (Leistung der Francis-Radialturbine), Massenmittelpunkt, verlustfreier Zusammenstoß, Trägheits- und Deviationsmomentenvektor, Drehlaufkatze gegen Federpuffer, Trägheitskraft eines zurückfallenden Kranauslegers. Anm. d. Ref.: Die allgemeine Körperbewegung kann so aufgespalten werden, daß die Drehachse immer durch denselben Körperpunkt geht (S. 93); diese Tatsache folgt nicht aus dem Miozzischen Satze, nach dem gleichzeitige Verschiebung und Drehung eine Schraubung sind, sondern aus dem Eulerschen Satze, nach dem die allgemeinste Körperbewegung um einen Punkt eine Drehung um eine durch diesen Punkt gehende Achse ist. Bei der Richtung der Coriolisbeschleunigung, die Laufradteile in einer Linkskurve haben (S. 94), müssen außen und innen vertauscht werden; in der Fortsetzung desselben Beispiels auf S. 111 wird mit einer Rechtskurve gerechnet.

R. Winkel, Mechanik flüssiger Körper. Ebene und drehsymmetrische Grundwasserströmung. Die gemittelte Fließgeschwindigkeit v in offenen Wasserläufen als Funktion des Profilradius R (Verhältnis der Querschnittsfläche zum benetzten Umfang) und des Wasserspiegelgefälles J ist $v = R^{\frac{5}{7}} \left(185 J^{\frac{4}{7}} - 210 J^{\frac{4,5}{7}} \right)$. Pfeilerstau, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles, Venturi-Messer, ballistische Wassermessung. Anm. d. Ref.: In Abb. 2 auf S. 115 muß die Wandlinie s bis an die Wasseroberfläche reichen; wird ein gerader Kreiszylinder mit waagerechter Achse eingetaucht, so schneidet die Kraft, mit der das Wasser oberhalb der Achse auf die Wand drückt, die Wandlinie nicht im unteren Drittelpunkt; wird im Querschnitt der Mittelpunktswinkel der benetzten Wandlinie mit α und der Steigungswinkel der

negativen Kraft mit β bezeichnet, so ist nicht $\beta = \frac{\alpha}{3}$, sondern $\operatorname{tg} \beta = \frac{2 \sin \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} - \alpha}{\sin^2 \alpha}$. Beim

Innendruck in Rohrleitungen (S. 117) muß die Gleichung $\int_{r=0}^{r=\pi} p_y f ds = \int_{x=0}^{x=r} p f dx$ zunächst in $p_y f ds = p f dx$ berichtigt werden; in dieser Gleichung darf die veränderliche Kompo-

nente p_y nicht vor das Integralzeichen gezogen werden; die gesuchte Gleichung, nach der die auf die Längeneinheit bezogene Normalkraft im Achsenschnitt gleich Innendruck mal Radius ist, folgt aus der Gleichgewichtsbedingung: Summe der an einem Rohrstück in radialer

Richtung angreifenden Kräfte = 0. Auf S. 124, drittletzte Zeile muß statt $\int \frac{df}{du}$ stehen $\frac{\int df}{\int du}$.

Auf S. 127 muß in Gleichung (38a) statt q stehen Δq ; in Gleichung (39) muß statt cv stehen $c \Delta v$. Bei der Schwingungsdämpfung im Wasserschlosse ist $\Delta v : \Delta t = \text{Kraft} : \text{Masse}$ (S. 130) nicht die Energiegleichung. Beim Ausfluß durch eine Seitenöffnung mit konstanter Breite

(S. 137) muß statt $\int_{z_u}^{z_0} z^{0,5} dz$ stehen $\int_{z_0}^{z_u} z^{0,5} dz$. Trifft die in eine Schleusenkammer einströmende

Wassermenge $q(\text{m}^3/\text{s})$ die Schiffsfläche f_0 mit der Geschwindigkeit $v(\text{m/s})$, so soll mit einem

Beiwert $a < 1$ nach Gleichung (74) auf S. 141 am Schiff die Kraft $K = a \frac{\gamma}{g} (qv) f_2$ angreifen; diese Gleichung stimmt nicht in bezug auf die Dimension der Länge.

W. Flügge, Festigkeitslehre und Elastizitätstheorie. Räumliche Biegung eines Stabes, Querschnittskern, plastische Biegung, Biegung stark gekrümmter Stäbe, Schubspannungen in gebogenen Stäben, freie Torsion, Wölbkrafttorsion, Dreischübegleichung der Faltwerke, Biegung der Kreisplatten mit konstanter und mit veränderlicher Dicke, der Rechteckplatten und der Plattenstreifen, Membranspannungen in drehsymmetrischen Schalen (Kugel, Kegel) mit drehsymmetrischer Last, Biegespannungen in kreiszylindrischen Behältern mit konstanter und mit linear veränderlicher Wanddicke, Knickbiegung von Stäben, Knickung gegliederter Stäbe und von Rechteckplatten. Anm. d. Ref.: S. 153, 7., 8., 9. Zeile OAB, OBC,

OCA müssen durch OCB , OAC , OBA ersetzt werden. S. 161 in der Zeile unter Gleichung (31) müssen die Exzentrizitäten e_y und e_z vertauscht werden. Beim Rechteckquerschnitt S. 167 ist das statische Moment $S = \frac{b}{8}(h^2 - 4z^2)$. Der Faktor x S. 175 Gleichung (52) muß durch y ersetzt werden. Beim ebenen Spannungszustand (S. 176) würden aus den Verträglichkeitsbedingungen (5b und c) auf S. 145 die falschen Gleichungen $\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial y^2} = 0$ und $\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x^2} = 0$ folgen. Bei der Scheiben-Halbebene mit einer beiderseits begrenzten konstanten Flächenlast (S. 178, Abb. 54) kann die Schubspannung vereinfacht werden $\tau_{xy} = \frac{p}{\pi} \left[\frac{y^2}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right]$. Bei der periodisch belasteten Scheibenhalbebene (S. 178, Abb. 55) ist in der Schubspannung der Faktor vor dem Summenzeichen nicht $\frac{4\pi y}{\pi^2 c}$, sondern $4p \frac{y}{c}$; im Sonderfall der punktwisen Stützung ist in der Schubspannung (S. 179) der Faktor vor dem Summenzeichen nicht $-\frac{4py}{\pi l}$, sondern $-4\pi p \frac{y}{l}$. In der Wand mit endlicher Höhe (S. 179, Abb. 56) sind die Spannungskomponenten

$$\begin{aligned}\sigma_z &= 4 \frac{p}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi(l-c)}{l}}{\sin^2 \frac{2n\pi h}{l} - \left(\frac{2n\pi h}{l}\right)^2} \left[\frac{l}{2n\pi} \operatorname{Sin} \frac{2n\pi h}{l} \operatorname{Sin} \frac{2n\pi y}{l} \right. \\ &\quad \left. - (h-y) \operatorname{Sin} \frac{2n\pi h}{l} \operatorname{Cos} \frac{2n\pi y}{l} - h \operatorname{Sin} \frac{2n\pi(h-y)}{l} + \frac{2n\pi h}{l} y \operatorname{Cos} \frac{2n\pi(h-y)}{l} \right] \cos \frac{2n\pi x}{l}, \\ \sigma_y &= 4 \frac{p}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi(l-c)}{l}}{\sin^2 \frac{2n\pi h}{l} - \left(\frac{2n\pi h}{l}\right)^2} \left[\left(\frac{l}{2n\pi} \operatorname{Sin} \frac{2n\pi h}{l} + h \operatorname{Cos} \frac{2n\pi h}{l} \right) \operatorname{Sin} \frac{2n\pi y}{l} \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{Sin} \frac{2n\pi h}{l} y \operatorname{Cos} \frac{2n\pi y}{l} - \frac{2n\pi h}{l} y \operatorname{Cos} \frac{2n\pi(h-y)}{l} \right] \cos \frac{2n\pi x}{l}, \\ \tau_{zy} &= -4 \frac{p}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi(l-c)}{l}}{\sin^2 \frac{2n\pi h}{l} - \left(\frac{2n\pi h}{l}\right)^2} \left[\operatorname{Sin} \frac{2n\pi h}{l} (h-y) \operatorname{Sin} \frac{2n\pi y}{l} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2n\pi h}{l} y \operatorname{Sin} \frac{2n\pi(h-y)}{l} \right] \sin \frac{2n\pi x}{l}.\end{aligned}$$

Für die Stauwand (S. 180) ist bei Belastung durch Eigengewicht die Spannungsfunktion $F = \frac{\gamma_b h}{6b} x^3 - \frac{\gamma_b}{2} x^2 (h-y)$. S. 183, Gleichung (56) γ muß durch y ersetzt werden; in Abb. 63 müssen die Ordnungszahlen der Scheiben um 1 vergrößert werden. Wenn bei einer Platte, deren Mittelebene als (x, y) -Ebene gewählt wird, ε_z und $\sigma_z = 0$ angenommen werden (S. 186), dann folgt aus dem Hookeschen Gesetz $\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$ die Gleichung $\sigma_x + \sigma_y = 0$, also mit den ersten beiden Gleichungen (64) die falsche Gleichung $\Delta w = 0$; aus den Gleichungen $u = -z \frac{\partial w}{\partial x}$ und $v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$ folgen γ_{xz} und $\gamma_{yz} = 0$ und hiermit aus (62) die falschen Gleichungen Q_x und $Q_y = 0$. Bei der am Rande eingespannten Kreisplatte mit radial anwachsender Flächenlast (S. 189) ist in der Querkraft der Zahlenfaktor nicht $\frac{1}{4}$, sondern $\frac{1}{2}$. Wenn bei der an den Seiten frei aufliegenden Quadratplatte mit der Seite a und der Punktlast P (S. 192, Abb. 78) die Momente $M_x = \beta_x Pa$, $M_y = \beta_y Pa$ und $M_{xy} = \gamma Pa$ gesetzt werden, können die Koeffizienten β_x , β_y und γ nicht dimensionslos sein. Trägt eine Kugelschale mit dem Radius a im höchsten Punkte die Last P (S. 199), so ist die Meridianlängskraft $N_\varphi = -\frac{P}{2\pi a \sin^2 \varphi}$; bei der Kegelschale mit hydrostatischem Außendruck muß in den Gleichungen für die Meridian- und die Ringlängskraft \cos durch \sin ersetzt werden. In der Integralgleichung für Knickstäbe mit veränderlichem Trägheitsmoment (S. 208) ist der Kern $k(\xi, \eta) = (1-\eta)\xi$ für $\xi \leq \eta$ und $k(\xi, \eta) = \eta(1-\xi)$ für $\xi \geq \eta$ als Funktion der beiden Veränderlichen nicht unstetig, sondern stetig.

Kurt Beyer, Baustatik. Berechnung der Stabkräfte im allgemeinen Strebenfachwerk, im Strebenfachwerk mit waagerechten Gurten, im allgemeinen Ständerfachwerk, im Ständer-

fachwerk mit waagerechtem Obergurt, im Ständerfachwerk mit waagerechtem Untergurt, im Ständerfachwerk mit waagerechten Gurten, im allgemeinen K-Fachwerk und im K-Fachwerk mit waagerechten Gurten, Änderung der Stablänge durch Stabkraft und Temperaturänderung, Änderung der Stablänge und Stabdrehwinkel durch Verschiebung der Endpunkte, Änderung der Winkel zwischen den Stäben durch Dehnungen der Stäbe, Stabdrehwinkel durch Änderung der Winkel zwischen den Stäben, Relativverschiebung eines Stabzuges unbegrenzter Stab auf elastischer Unterlage, wenn in einem Punkte eine Last oder ein Moment angreift, einseitig begrenzter Stab auf elastischer Unterlage, wenn am Ende eine Punktlast oder ein Moment angreift, räumliche Stab- und Fachwerke, Satz von Cauchy, nach dem konvexe Polyeder aus starren Flächen starr sind; Stützkkräfte, Querkkräfte, Momente, Biegelinie, ausgezeichnete Verschiebungen und Verdrehungen der Endquerschnitte verschiedener Träger, Einflußlinien der Stabkräfte für ein Streben- und ein Ständerfachwerk, Gerberträger, Bogenträger und Rahmen. Anm. d. Ref.: Bei der Berechnung der Stützenkräfte einer freien Kette mit 8 Scheiben (S. 225) fehlt von den Momenten für das Gelenk i (Kräfte rechts vom Schnitt) $-4,0C_x$. In der Gleichung für die Stützkkräfte eines an einem Ende eingespannten und am anderen Ende aufliegenden Trägers bei ungleichförmiger Erwärmung (S. 282, d, θ , 2) muß statt $\alpha +$ stehen α_1 . Wird die Last durch Querträger auf den Längsträger mit der Länge l übertragen, so hat die Einflußlinie der Querkraft zwischen dem $k-1$. und dem k . Querträger die kleinste Ordinate (S. 287, Abb. 109) $-\frac{x_{k-1}}{l}$ nicht $-\frac{x_k}{l}$. Ebenso wie

die Gleichungen (162) auf S. 292 für die Pfosten eines Ständerfachwerks nur bei waagerechtem Untergurt gelten, muß in den Gleichungen (160) für den Untergurt $\cos \beta_k = 1$ gesetzt werden.

P. Werkmeister, Vermessungskunde. Instrumente, Lage- und Höhenmessungen, Vordrucke. *Ludwig* (Hannover).

● Chmelka, Fritz, und Ernst Melan: Einführung in die Statik. Wien: Springer 1942. VII, 132 S. u. 119 Abb. RM. 6.60.

Das Buch ist eine Wiedergabe der Vorlesungen der beiden Verff. über Statik für die Hörer des ersten Semesters der Abteilung für Architektur an der Technischen Hochschule zu Wien. In sechs Abschnitten werden behandelt: Zusammensetzung und Gleichgewicht von Kräften, Schwerpunkte ebener Flächen, die einfachsten statisch bestimmten Träger, ebene Fachwerke, Gerberträger, Dreigelenkbogen.

A. Schleusner (Berlin-Charlottenburg).

● Southwell, R. V.: Relaxation methods in engineering science. Oxford: Clarendon press 1940. VII, 252 pag. 17/6.

Bădescu, Radu: Sur le mouvement tautochrone plan. Bull. sci. École polytechn. Timişoara 11, 81—103 (1943).

1° Exposé du problème et démonstration des résultats classiques. 2° La courbe étant donnée, trouver la force. Cela nécessite des conditions supplémentaires; par exemple force de direction fixe, force centrale, fonction de force. 3° La loi de force étant donnée, trouver la courbe. Les coordonnées d'un point de la courbe, fonctions de l'arc, sont solutions d'un système différentiel dont l'A. cherche les solutions singulières. Si elles existent, ce sont les lignes de force du champ. Condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne de force soit tautochrone. Etude de ce cas particulier. 4° Cas général: a) au point de tautochronisme la force est normale à la tangente. La discussion des conditions de Lipschitz montre que par chaque point régulier d'un champ aboutissent au plus 4 arcs. b) la force est nulle au point de tautochronisme. Il peut alors exister 0, 1, 2 ou une infinité de courbes. Cas particulier du champ dérivant d'un potentiel, avec applications.

Pailloux (Stettin).

Sémirot, Pierre: Sur les mouvements périodiques d'un corps attiré par deux centres fixes. C. R. Acad. Sci., Paris 215, 408—410 (1942).

Etude du mouvement dans l'espace d'un point attiré suivant la loi de Newton. Il n'existe pas d'orbites périodiques à choc dans l'espace. Les mouvements périodiques sont instables.

Pailloux (Stettin).

Elastizität, Akustik:

● Timoshenko, S.: Strength of materials. Pt. 2. Advanced theory and problems. 2. edit. New York: D. Van Nostrand Comp. 1941. 510 pag. \$ 4.50.

Cisotti, U.: *Elementi di media nella meccanica dei sistemi continui*. Rend. Semin. mat. fis. Milano 14, 128—138 (1940).

Vgl. dies. Zbl. 27, 166.

Signorini, Antonio: *Deformazioni elastiche finite: Elasticità di 2° grado*. (Bologna, 4.—6. IV. 1940.) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 56—71 (1942).

Kritischer Bericht über die Untersuchungen verschiedener Autoren im Gebiete der Theorie der endlichen Verzerrungen in den fünf Jahren 1935—1940 mit besonderer Berücksichtigung der Ideen des Verf. — Es handelt sich um Probleme der isothermen Elastostatik für homogene elastische Körper. Ist S ein solcher Körper, so setzt die gewöhnliche Theorie folgendes voraus: I. die Umkehrbarkeit der Transformationen und die Möglichkeit der Bestimmung des Zustandes jedes Elementes dS durch lokale Parameter; II. die Existenz eines ungezwungenen Gleichgewichtszustandes C_* ; wird S aus C_* irgendwie deformiert, so entsteht eine negative Arbeit der inneren Kräfte; III. den infinitesimalen Charakter der Transformation jedes Elementes, und zwar sowohl (III') der reinen Deformation, als auch (III'') der starren Rotation. Verf. nennt nun eine Theorie „vom vollständigen Typus“, wenn sie vollkommen auf III verzichtet. Es handelt sich also nicht bloß um die Theorie der „dünnen“ Körper, da diese Theorie zwar auf III' aber nicht auf III' verzichtet. — Wird die Gesamtheit der Transformationen $C_* \rightarrow C$ betrachtet, so folgt aus I und II die Existenz einer Funktion $W(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_6)$ [wo ε_i ($i = 1, \dots, 6$) die Deformationskomponenten bedeuten], die Null für C_* und positiv für jede C ist: W ist die potentielle Energie. Hat P_* in C_* die Koordinaten y_i ($i = 1, 2, 3$), so hängen bekanntlich die ε_i quadratisch von den $u_{rs} = \frac{\partial u_r}{\partial y_s}$ ab, und W kann auch als Funktion der u_{rs} betrachtet werden.

Für die $u_i(y_1, y_2, y_3)$ erhält man damit ein System von drei Differentialgleichungen (die Elastizitätsgleichungen in Lagrangescher Form) mit drei Randbedingungen, das durch Potenzreihen in einem Hilfsparameter integriert werden kann. Unterbricht man die Potenzreihen an einer bestimmten Potenz, so findet man eine bestimmte Annäherung des Problems. Will man aber z. B. die zweite Annäherung berechnen, falls die erste schon bekannt ist, so findet man gewisse Integrabilitätsbedingungen, die nicht erfüllt zu sein brauchen. — Natürlich besteht die größte Schwierigkeit der Theorie in der richtigen Wahl der Funktion W , was besonders ungünstig ausfällt, auch wenn die Form der W gegeben ist, da die ε_i nicht die Spannungskomponenten X_{rs} bestimmen. Im isotropen Falle kann man etwas weiter gehen, wenn man sich auf den Eulerschen Standpunkt stellt und systematisch die Deformationskomponenten der inversen Transformation $C \rightarrow C_*$, d. h. die ε'_i ($i = 1, \dots, 6$), die aus den $\frac{\partial u_r}{\partial x_s}$ genau wie die ε_i aus den $\frac{\partial u_r}{\partial y_s}$ konstruiert sind, betrachtet. Man kann hier naturgemäß annehmen, daß $W = F(I'_1, I'_2, I'_3)$ sei, wo I'_s ($s = 1, 2, 3$) die drei Invarianten der Deformation $C \rightarrow C_*$ sind. Die X_{rs} sind jetzt Polynome zweiter Ordnung in den ε'_i , wo aber die Koeffizienten im allgemeinen von den I'_s abhängen. Die Frage, ob F so gewählt werden kann, daß die X_{rs} Polynome zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten in den ε'_i werden, kann bejahend beantwortet werden. Man gelangt so zur „Elastizität zweiten Grades“, die vom logischen Standpunkte besonders konsequent ist, so daß sie einer tieferen Untersuchung würdig scheint. Zuletzt kommt die Diskussion eines Beispiels gerade im Gebiete der Elastizität zweiten Grades. Conforto (Rom)._o

Frola, Eugenio: *Su alcune questioni di elasticità non lineare*. Atti Accad. Sci. Torino 77, 258—262 (1942).

In einem Bericht über die Theorie großer Verschiebungen, die Trefftz u. a. (s. z. B. Kappus, vgl. dies. Zbl. 22, 86 u. 415) im Hinblick auf die energetische Behandlung von Stabilitätsproblemen entwickelt haben, zitiert Cicala (vgl. dies. Zbl. 25, 272) auch Formeln des Verf. (vgl. dies. Zbl. 25, 161) und zeigt einen Widerspruch auf, zu dem man bei Anwendung dieser Formeln gelangt. Verf. verwahrt sich gegen

diesen Vorwurf mit dem Hinweis, daß er die Gültigkeit seiner Formeln für eigentlich-„große“ Deformationen nirgends behauptet habe. Dabei benutzt er die Gelegenheit, an dem Kritiker Kritik zu üben, indem er einige unvollständig begründete Vernachlässigungen in einer älteren — durch den oben erwähnten Bericht allerdings in gewisser Weise überholten — Arbeit (s. dies. Zbl. 25, 271) hervorhebt.

Marquerre (Adlershof).

Iterson, F. K. Th. van: Beitrag zur Plastizitätstheorie. Versl. Nederl. Akad. Wetensch. 52, Nr 1, 5—10 u. dtsh. Zusammenfassung 10 (1943) [Holländisch].

In den sog. ebenen Plastizitätsproblemen muß die Hauptspannung normal zum Querschnitt mit in Betracht gezogen werden. Die drei Hauptspannungen zusammen bringen den Werkstoff zum Fließen. — Die Schubspannung τ für die Begrenzungs-ebenen des elementaren Oktaeders, dessen Achsenkreuz mit den Hauptrichtungen zusammenfällt, berechnet sich zu $\tau = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$, ausgedrückt in die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. — Das Huber-Hencky-von Mises'sche Plastizitätskriterium läßt sich derart formulieren, daß Plastizität eintritt, sobald τ einen kritischen Wert überschreitet (oder aber wenn die größte Dehnung bzw. die Formänderungsarbeit pro Volumeinheit zufolge der Schubspannungen, d. h. nach Beseitigung der hydrostatischen Spannung $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$, einen bestimmten Wert erreicht).

Öfters fehlt bei ebenen oder bei Umdrehungsaufgaben der Plastizitätslehre eine Gleichung, um die Hauptspannung normal zum (rotierenden) Querschnitt berechnen zu können. Auf Grund der Henckyschen Hypothese, welche besagt, daß die inneren Spannungen sich derart einstellen, daß der Werkstoff unter der kleinst möglichen Belastung fließt, wird bewiesen, daß in jenen Fällen diese Spannung sich einspielt auf die eine oder die andere der zwei übrigen Hauptspannungen, so daß zwei dieser drei Spannungen aneinander gleich sind. Dieses Erkenntnis ermöglicht, verschiedene Probleme der Technik zu lösen. *Kosten (Delft).*

Putman, Henri J. B.: Note sur le cercle de Mohr. Trans. roy. Soc. Canada, III. s. 34, 43—46 (1940).

Einfache Ableitung der Eigenschaften des dreiachsigen Mohrschen Spannungskreises unter Benutzung des Vektorkalküls. Es wird gezeigt, (1) daß Breitenkreise der Einheitskugel in der Mohrschen Darstellung wieder zu Kreisen werden, (2) daß zwei der vier Schnittpunkte der transformierten Breitenkreise mit zweien der Mohrschen Kreise auf einer Geraden liegen durch den Berührungspunkt dieser beiden Mohrschen Kreise und (3) daß man mit dieser Geraden unmittelbar den Winkel der Flächennormalen mit einer Hauptrichtung erhält. *R. Kappus (Adlershof).*

Weber, Constantin: Eingrenzung von Verschiebungen mit Hilfe der Minimalsätze. Z. angew. Math. Mech. 22, 126—130 (1942).

Weber, Constantin: Eingrenzung von Verschiebungen und Zerrungen mit Hilfe der Minimalsätze. Z. angew. Math. Mech. 22, 130—136 (1942).

Berechnet man das Verhalten eines elastischen Systems näherungsweise mit Hilfe des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie, so erscheint das System steifer, als es ist; geht man aus vom Minimum der Ergänzungsarbeit (gewöhnlich Prinzip von Menabrea oder Castigliano genannt), so erscheint es weniger steif als in Wirklichkeit. Diese Tatsache, die der Verf. in früheren Arbeiten, vor allem im Hinblick auf das Problem der Balkenbiegung ausführlich erörtert hat (vgl. dies. Zbl. 25, 271 u. 26, 236), wird in den beiden vorliegenden Noten dazu benutzt, Verschiebungen und Verzerrungen elastischer Körper einzugrenzen. Die erste Note bringt als ein mathematisch möglichst übersichtliches Beispiel die querbelastete quadratische Membran, bei der für die Verschiebung in der Mitte zwei enge Schranken angegeben werden; die zweite Note betrachtet zunächst die Randverschiebung eines zweidimensionalen elastischen Gebildes und überträgt die Überlegung sodann auf Zerrung und Spannung, wobei die Wahl geeigneter Singularitäten in den Lösungen für Brauchbarkeit und Güte des Ergebnisses maßgebend ist.

Marquerre (Adlershof).

Bonvicini, Dante: Metodo ordinario e criterio energetico per la determinazione dei carichi critici. Atti Mem. Accad. Sci. Padova, N. s. 57, 199—211 (1942).

Verf. zeigt, daß die Berechnung der kritischen Last bei Stabilitätsaufgaben auf Grund der Untersuchung einer benachbarten Gleichgewichtslage unter bestimmten Bedingungen mit der energetischen Methode identisch ist. *H. Neuber.*

Bonvicini, Dante: Sulla stabilità dell'equilibrio di un'asta con vincoli elastici. Atti Mem. Accad. Sci. Padova, N. s. 57, 213—220 (1942).

Als Beispiel zur obigen Darlegung behandelt Verf. den an einem Ende starr, am anderen Ende elastisch eingespannten Druckstab. *H. Neuber (Braunschweig).*

Mertens, R.: Über die Theorie des Klavierhammers und der Klaviersaite. Wis- en Naturkundg Tijdschr. 11, 122—130 (1943) [Flämisch].

Verf. erwähnt zunächst 10 Schrifttumsstellen, welche sich mit dieser Theorie befassen. Falls der Hammer die Saite nahe dem einen Saitenende berührt, kann die Saite für die Theorie des Anschlages als halbunendlich lang betrachtet werden, denn die reflektierte Saitenwelle vom entfernten Saitenendpunkt erreicht die Anschlagstelle erst, nachdem der Hammer sich wieder abgelöst hat. Der Hammer soll aus einer starren Masse bestehen, die eine massenlose Feder trägt. Dieser Hammer klopft auf die Saite. Verf. geht zur Lösung der Aufgabe von der d'Alembertschen Formel aus, nach der vom Berührungspunkt des Hammers zwei Wellenbewegungen sich in entgegengesetzter Richtung fortpflanzen. Bei der Bewegungsgleichung des Hammers wird eine vollkommen elastische Feder angenommen. Verf. verfolgt die verschiedenen Perioden der Hammerbewegung und leitet aus dem Zusammenwirken von Hammer und Saite den Ausdruck für den zeitlichen Verlauf der Kraft ab, welche im Anschlagpunkt auf die Saite wirkt. Als ersten Fall betrachtet er einen starren Hammer ohne die obengenannte Feder und zeichnet hierfür den Kraftverlauf als Funktion der Zeit bei bestimmten Annahmen über die Masse des Hammers und die Eigenschaften der Saite. *M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

Signorini, Antonio: Sulle proprietà di media comuni a tutti i sistemi continui. Atti Accad. Italia, VII. s. 2, 728—734 (1941).

Ein prismatischer, horizontaler, an beiden Enden frei aufliegender Stab sei irgendwie belastet und auf Biegung beansprucht. Es wird vorausgesetzt, daß in jedem Normalquerschnitt A die horizontale Achse n durch den Schwerpunkt Hauptachse sei. Außerdem seien ϱ und I der Trägheitsradius und das Trägheitsmoment in bezug auf n (so daß $I = A\varrho^2$), m_* und M der Mittelwert und der Maximalwert des Biegemomentes m (≥ 0) längs des Stabes, σ_{\max} der Maximalwert des absoluten Betrages der Normalspannung, y der größte Abstand eines Punktes des Normalquerschnittes A von n . Nun beweist Verf., ohne irgendwelche Voraussetzung über die Natur und den Zustand des Stabes, die Ungleichung: $\sigma_{\max} > \frac{m_* \varrho}{I}$. Diese Stabilitätsungleichung kann nicht verbessert werden, wenn man keine besonderen Voraussetzungen über das Material des Stabes machen will. Verf. beweist nämlich durch Vergleich mit der bekannten Formel $\sigma_{\max} = \frac{My}{I}$, daß σ_{\max} in besonderen Fällen beliebig nahe an $\frac{m_* \varrho}{I}$ fallen kann. *Conforto (Rom).*

Girkmann, Karl: Gleichgewichtsverzweigung an einem querbelasteten Druckstabe. S.-B. Akad. Wiss. Wien IIa 150, 257—279 (1941).

Belastet man einen an zwei End- und einer Mittelstütze gelenkig gelagerten Balken durch Längs- und Querkraften, so entsteht unter einer geeigneten Längsdruckkraft S trotz der „Vorverformung“ eine Gleichgewichtsverzweigung. Verf. zeigt zunächst, daß die Verzweigung bei „kleiner“ Vordurchbiegung unabhängig von der Höhe der Querkraft p unter der Eulerlast des Balkenfeldes eintritt und verfeinert dann die Untersuchung, indem er „endliche“ Verformungen berücksichtigt. Nach der Energiemethode und durch eine direkte näherungsweise Integration ergibt sich übereinstimmend (was

auch mechanisch einleuchtend ist), daß die Krümmung die Knicklast hinaufsetzt. Die Zahlenwerte weichen zwar, je nach der Annahme, die man über das Verhalten der Querlast während des Knickvorganges macht, voneinander ab, zeigen aber, daß die Erhöhung von der Größenordnung pa/S ist (a = Feldweite), in baupraktischen Fällen also (wegen der doch sehr kleinen Durchbiegungen) nicht wesentlich werden kann.

Marquerre (Adlershof)._o

Reinitzhuber, F.: Der Einfluß der Verformung bei der Ermittlung der inneren Kräfte von Biegeträgern mit gerader Stabachse. Luftf.-Forschg. 19, 320—325 (1942).

In Trägern, die aus 2 Gurten mit dünnem Steg bestehen, also z. B. in Flugzeugholmen, treten außer den Biege- und Schubspannungen der technischen Biegelehre auch senkrecht zur Stabachse wirkende Druckspannungen infolge der Durchbiegung auf. Diese radialen Zusatzbeanspruchungen wachsen mit großer Näherung proportional dem Quadrat der Biegespannung an und dürfen meist nicht vernachlässigt werden, denn sie bedeuten nicht nur eine zusätzliche Belastung der Verbindungsmittel zwischen Stegblech und Gurt, sondern sie müssen vor allem vom Stegblech und den Querversteifungen aufgenommen werden (Beul- und Knickgefahr!) und ergeben außerdem im allgemeinen eine Beanspruchung der Gurte auf Torsion. — Verf. zeigt an Hand eines Beispiels, daß die Trägerdurchbiegung zwar die Biege- und Schubspannungen nur ganz unwesentlich beeinflußt, daß sie aber u. U. ganz beachtliche radiale Zusatzbeanspruchungen hervorruft. Diese lassen sich stets mit genügender Genauigkeit aus einer einfachen Näherungsformel errechnen.

R. Kappus (Berlin-Adlershof)._o

Ohlig, R.: Die achsensymmetrisch belastete dicke Kreisplatte. Ing.-Arch. 13, 155—162 (1942).

Zur Lösung der bekannten Gleichungen $\Delta \Delta w = 0$ und $(\Delta - 1/r^2)(\Delta \varrho - \varrho/r^2) = 0$ für die Verschiebungen w und ϱ senkrecht bzw. parallel zur Plattenebene werden die Ausdrücke $w = e^{\lambda z/a} J_0\left(\frac{\lambda r}{a}\right)$, $\varrho = e^{\lambda z/a} J_1\left(\frac{\lambda r}{a}\right)$ herangezogen, wo J_0 und J_1 Zylinderfunktionen sind, während die Werte λ die positiven Wurzeln der Gleichung $J_0(\lambda) = 0$ bedeuten (a = Außenhalbmesser der Platte). Die von z abhängigen Funktionen enthalten vier Integrationskonstanten, die aus den Randbedingungen ermittelt werden. Aus den allgemeinen Ausdrücken für die Normalspannungen werden die Biegemomente in radialer und tangentialer Richtung gebildet. Die Momente im Mittelpunkt der Platte werden für den Fall ausgerechnet, daß die Last auf einem Kreis vom Halbmesser c um den Mittelpunkt gleichmäßig verteilt ist. Ferner wird $h/a = 1/5$ und $1/20$ (h = Plattendicke) sowie die Querdehnungszahl $\nu = 0,125$ angenommen. Der Vergleich mit den sich nach der Theorie dünner Platten ergebenden Biegemomenten läßt erkennen, daß die relativen Abweichungen für $h/a = 1/20$ und $c/a = 1/40$ etwa 1,2% betragen und mit wachsenden Werten c/a abnehmen. Für $h/a = 1/5$ und $c/a = 1/40$ weichen die Momente um rd. 6% voneinander ab. Aus den Formeln für die Biegemomente geht hervor, daß die Lastverteilung in hohem Grade von der Querdehnungszahl ν abhängt, da die Momente einen guten Maßstab für die Größe der durch die Platte bewirkten Lastverteilung liefern. Wird $\nu = 0$ gesetzt (wie bei den statischen Berechnungen im Eisenbetonbau üblich), so kann bei normalen Lastaufstandsflächen mit keiner Lastverteilung innerhalb der Platte gerechnet werden. Verf. weist jedoch darauf hin, daß beim Eisenbeton die Dehnungen schneller zunehmen als die Spannungen. Bei Belastungsstufen, die nahe der Bruchgrenze gelegen sind, werden deshalb auch weiter von der Angriffsstelle der Last entfernt liegende Plattenelemente mit zur Lastaufnahme herangezogen.

Gran Olsson (Trondheim)._o

Agostinelli, Cataldo: Vibrazioni e pressioni critiche in una piastra circolare sollecitata al contorno da una pressione radiale. (Bologna, 4.—6. IV. 1940.) Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 360—370 (1942).

Verf. gibt mit Hilfe des Ansatzes $w = \sum_m W(r) \cos m\varphi \cos k_m t$ die Frequenzen-

gleichung und die Knickbedingung an für die Kreisringplatte, die innen eingespannt, außen radial gedrückt, aber nicht gestützt ist. Bei der Spezialisierung der Knickgleichungen auf den Sonderfall der im Mittelpunkt eingespannten Kreisplatte geht eine Integrationskonstante verloren, so daß Verf. zu dem unrichtigen Schluß kommt, daß es Knickformen $m = 0$ und $m = 1$ nicht geben könne. *Marquerre.*

Schubert, Gerhard: Zur Frage der Druckverteilung unter elastisch gelagerten Tragwerken. *Ing.-Arch.* 13, 132—147 (1942).

Der Untersuchung liegen die Annahmen einer homogenen, isotropen Fundamentbettung, deren Stoff dem Hookeschen Gesetz gehorcht, zugrunde. Etwaige plastische Formänderungen werden vernachlässigt. Ferner wird die Reibung zwischen Tragwerk und Untergrund nicht beachtet. — Bei angenommener Druckverteilung über der Berührungsfläche von Fundament und Untergrund wird es beim ebenen und achsensymmetrischen Fall möglich, die Vertikalverschiebung des Bettungsrandes durch einfache Integralausdrücke darzustellen. Faßt man diese Beziehungen als Integralgleichungen auf, so können Formeln entwickelt werden, die die Druckverteilung unter den Fundamenten aus vorgeschriebenen Fundamentbewegungen zu berechnen gestatten. Damit kann der Druckverlauf unter starren Fundamenten im ebenen und achsensymmetrischen Falle allgemein ermittelt werden. — An Sonderfällen untersucht der Verf. zunächst prismatische Fundamentkörper, und zwar: das symmetrisch und unsymmetrisch belastete Fundament mit ebener Sohlfläche, das schneidenförmige Fundament, die parabolisch abgerundeten Schneidenprofile neben parabolisch gewölbten Fundamentsohlen, ferner den Fall einer ebenen Fundamentsohle mit abgerundeten Kanten. Weiterhin werden die eben genannten Profile auch für rotationssymmetrische Fundamentkörper untersucht. Der letzte Teil der Abhandlung berührt endlich die Frage der Druckverteilung unter elastisch verformbaren Fundamenten.

Friedrich Klinger (Wien).

Reissner, Eric: A contribution to the theory of elasticity of non-isotropic materials (with applications to problems of bending and torsion). (*Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge, Mass.*) *Philos. Mag.*, VII. s. 30, 418—427 (1940).

Für eine ebene orthotrope Scheibe mit verschwindender Dehnsteifigkeit in einer Hauptrichtung läßt sich der Spannungs- und Verschiebungszustand in geschlossener Form angeben. Die einfache Lösung dieses Grenzfalls benutzt der Verf. zur Erläuterung der bekannten Nebenerscheinungen, die gegenüber den Spannungszuständen nach der elementaren Biege- und Torsionslehre infolge der Schubdeformationen und Wölbbehinderungen auftreten und bei kurzen Blechträgern und eingespannten flachen Kastenträgern in der Festigkeitsberechnung berücksichtigt werden müssen. *Köller.*

Reissner, Eric: Note on the problem of the distribution of stress in a thin stiffened elastic sheet. (*Dep. of Math., Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge, Mass.*) *Proc. nat. Acad. Sci. Wash.* 26, 300—305 (1940).

Die kurze Note beschäftigt sich mit dem Problem der Lasteinleitung in ebene Scheiben. Für den Spannungsverlauf in einer Steife, die am Randpunkt durch eine Normalkraft beansprucht wird und diese Kraft schrittweise an das Blech abgibt, wird eine Integralgleichung aufgestellt, deren Kern sich aus der Lösung des Problems der unendlichen Halbscheibe unter Linienlast als ein nicht ganz einfacher, gebrochen-rationaler Ausdruck in x und ξ ergibt [*E. Melan, Z. angew. Math. Mech.* 12, 343 (1932)]. Das „inverse“ Problem (die Bestimmung der Steifenabmessungen bei vorgegebenem Spannungsverlauf) führt auf einfache Quadraturen. — Eine Lösung der Integralgleichung versucht Verf. nicht; durch eine Dimensionsbetrachtung zeigt er nur, von welcher Parameterkombination die endgültige Lösung abhängen muß. *Marquerre.*

Scholte, J. G.: On surface waves in a stratified medium. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* 45, 380—386, 449—456 a. 516—523 (1942).

Nach kurzen Ausführungen über die Geschichte der Theorie elastischer Oberflächenwellen wird festgestellt, daß beim Anlaufen einer ebenen Raumwelle gegen eine ebene

Grenzfläche drei Arten von Oberflächenwellen zu erwarten sind: 1. Love-Wellen, wenn eine transversale, senkrecht zur Einfallsebene schwingende Welle anläuft; 2. verallgemeinerte Stonely-Wellen (nur, wenn die Dicke der oberen Schicht groß gegenüber der Wellenlänge ist), die die Grenzfläche entlanglaufen und deren Amplitude oberhalb und unterhalb der Grenzfläche exponentiell abklingt; 3. verallgemeinerte Rayleigh-Wellen (bei sehr dicker und sehr dünner oberer Schicht). Ausführliche theoretische Rechnungen zeigen, daß diese drei Wellenarten tatsächlich beim Anlauf von Raumwellen gegen eine Grenzfläche auftreten können, allerdings unter der merkwürdigen Voraussetzung, daß die Amplitude der anlaufenden Welle gleich Null gesetzt wird. Die unter 2. und 3. genannten Wellen, die beim Anlauf longitudinaler oder in der Einfallsebene schwingender transversaler Wellen zu erwarten sind, treten allerdings nur in Erscheinung, wenn sich die elastischen Konstanten beider Schichten in bestimmten Grenzen halten. Diese werden genau untersucht. Zum Schluß folgt noch eine kurze Diskussion der sich aus der Theorie ergebenden Dispersionskurven.

H. Jung (Clausthal)._o

Hydrodynamik:

Roszbach, H.: Über die unter einem Damm durch eine horizontale Parallelschicht sickende Wassermenge und die Auftriebsdruckverteilung an der Dammbasis. *Z. angew. Math. Mech.* **22**, 65—71 (1942).

Verf. behandelt das ebene Problem der Grundwasserströmung in einer (als Parallelstreifen angenommenen) sich unter einem Damm mit Spundwand horizontal erstreckenden durchlässigen Schicht, die nach unten von einer undurchlässigen Schicht begrenzt ist. Die Bestimmung des komplexen Potentials der Strömung, das gewissen, durch die hydrodynamischen und geometrischen Daten gegebenen Randbedingungen genügen muß, geschieht, indem die konforme Abbildung der Strömungsebene auf die Ebene des Potentials in einzelnen Schritten konstruiert wird. Für die unter dem Damm sekundlich durchsickernde Wassermenge sowie für die Druckverteilung längs der Spundwand und der Dammsohle werden Formeln angegeben. Die versickernde Wassermenge wird für verschiedene Verhältnisse der Dammbreite, Spundwandlänge und Schichtdicke in einem Diagramm dargestellt. Ein Vergleich mit zwei schon von T. Kano (*Jap. J. Astron. Geophys.* **17**, 173) nach einem Näherungsverfahren gerechneten Beispielen zeigt, daß die Kanosche Näherung in einem Fall einen um 37% zu großen Wert für die versickernde Wassermenge ergab. *W. Mangler* (Göttingen)._o

Shaw, F. S., and R. V. Southwell: Relaxation methods applied to engineering problems. 7. Problems relating to the percolation of fluids through porous materials. *Proc. roy. Soc., Lond. A* **178**, 1—17 (1941).

Verff. wenden die von ihnen in früheren Arbeiten entwickelte Näherungsmethode zur Behandlung von Randwertproblemen der Potentialtheorie mit stückweise unbekannten Rändern auf ebene stationäre Grundwasserprobleme mit freier Oberfläche und Strömungsprobleme in Bereichen mit Schichten verschiedener Durchlässigkeit an. Nach kurzer Entwicklung der mathematischen Grundlagen werden folgende Probleme behandelt: 1. Die Strömung durch einen Damm mit senkrechten Wänden; 2. Die Strömung durch einen Erdwall mit einer Dränageschicht auf einem Untergrund gleicher Durchlässigkeit; 3. Die Strömung durch einen Erdwall mit Dränageschicht auf einem aus zwei Schichten verschiedener Durchlässigkeit bestehenden Untergrund. — In einem Anhang wird das geometrische Verhalten der Kontur der freien Oberfläche an der Unterwasserseite eines Staudammes untersucht. (6. vgl. dies. Zbl. **24**, 335.)

Roszbach (Karlsruhe)._o

● **Sauer, Robert:** Theoretische Einführung in die Gasdynamik. Berlin: Springer 1943. VII, 146 S. u. 99 Abb. RM. 12.—.

Das vorliegende Buch entstand aus einer Juni bis August 1940 in Göttingen auf Veranlassung des verstorbenen C. Wieselsberger vom Verf. gehaltenen Vortragsreihe. Es faßt zum erstenmal die in zahlreichen Einzelarbeiten verstreuten und größtenteils

nur schwer zugänglichen Arbeitsweisen und Ergebnisse der theoretischen Gasdynamik bis in die neueste, u. a. vom Verf. selbst bestimmte Entwicklung hinein, unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zusammen; es vermittelt durch die dauernde Zurückführung auch verwickelterer Vorgänge auf die typischen elementaren allgemein ein treffendes Bild von der Tragweite der hierbei verwandten, mathematisch noch verhältnismäßig einfachen, für die Handhabung durch den Aerodynamiker wesentlich in Diagramme umgesetzten Mittel; es läßt den eigentlichen Mathematiker deren Grenzen erkennen und regt ihn eben dadurch zum Bereitstellen und Handhaben noch tiefer liegender und durchschlagenderer Methoden als der bisher allzu ausschließlich benutzten und zum Bearbeiten völlig neuer Fragen an. Im einzelnen wird in Abschnitt I nach Herleitung der Grundbegriffe und -gleichungen aus Strömungslehre und Thermodynamik (§§ 1, 2), der Betrachtung der eindimensionalen Strömung im Rohr und der Lavaldüse sowie der Beispiele Quelle, Senke, Wirbel (§ 3) die Gleichung des Potentials der allgemeinen räumlichen, der achsensymmetrischen räumlichen und der ebenen sowie der Stromfunktion der beiden letzten Strömungen aufgestellt (§ 4). Der II. Abschnitt behandelt die vom ungestörten Parallelstrom nur wenig abweichenden Strömungen mittels der nach dem Vorbild von Prandtl linearisierten Näherungsform der Potentialgleichung (§ 5). Für die ebene und räumliche Unterschallströmung werden die affinen Beziehungen zwischen kompressibler und inkompressibler Strömung (Prandtl'sche Regel), das Quell-Senken-Verfahren für Profil- und Drehkörperströmungen und das Abklingen von Störungen behandelt (§§ 6, 7). Das Machsche Netz mit der Adiabatenellipse bildet die Grundlage zum Studium der ebenen Überschallströmungen um eine flache Ecke, der Fortpflanzung schwacher Störungen, der Umströmung eines schlanken Profils und des dabei auftretenden Auftriebes und Widerstandes; kurze Ausführungen über die Charakteristikentheorie der hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen ordnen das Machsche Netz in einen allgemeineren mathematischen Zusammenhang ein (§ 8). Für den räumlichen Fall wird das von den Unterschallströmungen her gebräuchliche Quell-Senken-Verfahren für die Umströmung eines Drehkegels und allgemeiner eines beliebig zugespitzten Drehkörpers nutzbar gemacht (§ 9). Der III. Abschnitt ist allgemein der strengen Behandlung spezieller Randwertaufgaben, nämlich der Strömungen an Ecke und Kegel gewidmet. Abgesehen von zwei stetigen Strömungen, der Verdünnungsströmung um eine ebene konvexe Ecke, deren Geschwindigkeitsbilder als Epizykloiden erkannt werden (§ 10), und der Verdichtungsströmung um einen axial angeblasenen Drehkegel (§ 14), bildet der unstetige Verdichtungsstoß den Hauptgegenstand des Kapitels; ein solcher leitet auch die gerade erwähnte Drehkegelströmung ein. Für den Verdichtungsstoß an einer konkaven Ecke werden aus dem Impuls- und Energiesatz sowie der Kontinuitätsgleichung die Grundgleichungen in verschiedenen Formen, speziell auch noch für den senkrechten Stoß, aufgestellt (§ 11). Die Diagrammdarstellung der hierbei auftretenden physikalischen und geometrischen Größen gibt die A. Busemannsche Stoßpolare (§ 12); die Deutung am geometrischen Schema des Druckbergs und die Erörterung thermodynamischer Beziehungen, insbesondere die Ergänzung des Stoßpolarendiagramms durch die Ruhedruckkurven, schließen sich an (§ 13). Im Gegensatz zu den sehr eingeschränkten, dafür aber streng erfüllbaren Randbedingungen des III. Abschnitts befaßt sich der Verf. im IV. und letzten mit dem allgemeinen Randwertproblem, vornehmlich im ebenen Fall. Nach Erörterung der durch die H. J. Taylorsche elektrische Analogie mechanisierten Rayleigh-Janzenschen und der Prandtl-Görtlerschen Iterationsmethode und des Meyerschen Verfahrens zur Behandlung der Vorgänge in Düsen beim Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit (§ 15) bilden die beiden folgenden §§ 16, 17 das Kernstück der zur Potentialgleichung der ebenen kompressiblen adiabatischen Strömung gehörigen Entwicklungen. Nach Linearisierung der Differentialgleichung (Legendre- oder Molenbroek-Transformation) werden für den Überschallbereich einer vorgegebenen Strömung die Machschen Linien mit ihrem Verhalten an den Durch-

gangslinien durch die kritische Geschwindigkeit und den Tollmienschen Grenzlinien sowie dieser letzteren physikalische Deutung nach Ringleb diskutiert; die vor allem vom Verf. ausgebaute geometrische Konstruktion neuer Strömungsfelder durch Linearverbindung berührt sich schon mit der zunächst bei linearisierter Adiabate, sodann streng mittels Produkt- und Fourierreihenansatz durchgeführten Integration, die nach Tschaplin (1904) und unabhängig davon Damköhler (1938) (vgl. Vortrag des Ref. Jena 1941 [Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 52, Abt. 2, 37—38 (1942)]) auf die für numerische Rechnungen gut geeignete und noch wesentliche Entwicklungsmöglichkeiten des Problems versprechende hypergeometrische Differentialgleichung führt; hinsichtlich der von Ringleb (dies. Zbl. 23, 415), Jacob (dies. Zbl. 26, 167) und vom Ref. untersuchten Partikularlösungen wäre die Bedeutung auch der nichtregulären, mit einem logarithmischen Glied behafteten, meist übersehenen Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung zu betonen. Wie weit auf dem Wege über die Molenbroek-Transformation und die hypergeometrische Differentialgleichung die hierher gehörigen Rand- und Anfangswertprobleme nicht nur formal und numerisch, sondern auch vom Standpunkt allgemeinerer gasdynamischer Einsichten zugänglich werden, läßt sich augenblicklich noch nicht beantworten; Ref. neigt zur begründeten Annahme, daß diese Seiten der Fragestellung auf grundsätzlich anderen Wegen angegriffen werden müssen und können. Eine Methode ähnlichen mathematischen Gewichtes im Gebiet der Überschallströmungen wie die soeben besprochene für die Potentialgleichung bildet der Ideenkreis des durch eine Verbindung differentialgeometrischer Grundgedanken und der Charakteristikentheorie hyperbolischer partieller Differentialgleichungen gekennzeichneten Prandtl-Busemannschen Verfahrens, das eine allgemeine Näherungskonstruktion ebener Strömungsfelder zu vorgegebenen Anfangsbedingungen erlaubt, die an einigen typischen Beispielen durchgeführt wird (§ 18). Die zunächst ausschließlich für stetige adiabatische Zustandsänderungen angestellten Betrachtungen werden mittels Kombination des Charakteristiken- und Stoßpolarendiagramms auf Strömungen mit Verdichtungsstößen durch Behandlung aller einschlägigen Grundaufgaben verallgemeinert; Ausführungen über Auftrieb und Widerstand bei Überschallströmungen und Profilaare mit verschwindendem Widerstand schließen sich an (§ 19). Die dabei auftretende Erkenntnis, daß eine ebene Potentialströmung an einer gekrümmten Stoßlinie in eine nicht mehr wirbelfreie übergeht, führt zur Klärung des Zusammenhangs zwischen Wirbelfreiheit und Entropie (Crocco, Tollmien) und zur Aufstellung allgemeiner, auch für nicht wirbelfreie kompressible Strömungen gültiger Grundgleichungen und der verallgemeinerten Stromfunktion im ebenen und achsensymmetrischen räumlichen Fall (§ 20). Die nicht mehr wie im ebenen Fall linearisierbare Potentialgleichung der achsensymmetrischen räumlichen Strömung zwingt zu einer andersartigen Herleitung eines praktisch brauchbaren Charakteristikenverfahrens, das dann entsprechend dem früheren zu vorgegebenen Anfangsbedingungen die achsensymmetrische räumliche Strömung näherungsweise zu konstruieren gestattet (§ 21). An den Beispielen der Ausströmung aus einer drehsymmetrischen Düse und der Überschallströmung um eine axial angeblasene Geschosspitze wird diese Methode noch vorgeführt.

Grell (Augsburg).

Lamla, Ernst: Die symmetrische Potentialströmung eines kompressiblen Gases um einen Kreiszylinder im Freistrahle im unterkritischen Gebiet. Luftf.-Forsch. 19, 358—362 (1942).

Etude en deuxième approximation du problème de Janzen et Lord Rayleigh dans le cas d'un courant fluide bidimensionnel, de largeur finie $2h$ à l'infini en amont, qui heurte un obstacle circulaire. On suppose que la configuration admette un axe de symétrie. Soient $\alpha = \frac{U}{a_0}$ le nombre de Mach (U vitesse du courant à l'infini, a_0 vitesse de propagation du son dans le fluide au repos) et $\omega = \varphi + i\psi$ le potentiel complexe de l'écoulement. En posant $\omega = \omega_0 + \alpha^2 \omega_1 + \dots$, où $\omega_0(z) = \varphi_0 + i\psi_0$

représente le potentiel complexe de l'écoulement incompressible, l'au. est conduit à exprimer ω_1 au moyen des variables $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$ par la formule

$$4\omega_1 = \frac{d\omega_0}{dz} \int \left(\frac{d\bar{\omega}_0}{d\bar{z}} \right)^2 d\bar{z} - \bar{\omega}_0 + g(z),$$

$g(z)$ devant être déterminé par les conditions aux limites. Le succès de la méthode est dû à ce que l'au. réussit à exprimer $\frac{d\omega_0}{dz}$ en fonction de ω_0 par un produit infini, ce qui lui fournit une bonne approximation du profil circulaire dans l'écoulement incompressible. Il emploie à cet effet le changement de variable $\omega_0 = \zeta + \frac{C^2}{\zeta}$. Le profil de l'obstacle dans l'écoulement compressible correspondra alors à $\zeta = C e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

Posant $\delta = \frac{\pi C}{h}$, on arrive à déterminer $g(z)$ de telle façon que la condition $V = U$ sur les lignes libres soit vérifiée si l'on tient compte des termes jusqu'en δ^3 ; la condition $\psi_1 = 0$ sur le profil est réalisée jusqu'aux termes en δ^2 . Une fois l'expression de ω_1 en fonction de ζ et $\bar{\zeta}$ obtenue, l'au. en déduit celle des différents éléments caractéristiques de l'écoulement.

C. Jacob (Timisoara).

Küchemann, D., und F. Vandrey: Über den Einfluß der Düse auf Widerstandsmessungen im Freistrah. 2. Z. angew. Math. Mech. 22, 15—22 (1942).

Die Verf. haben in einer früheren, gleichbetitelten Arbeit (vgl. dies. Zbl. 26, 28) die Frage behandelt, wie sich der Einfluß der Düse auf die Widerstandsmessungen in einem Windkanal mit freier Meßstrecke auswirkt. Dabei wurde der Kanalquerschnitt kreisförmig vorausgesetzt, und es wurden Widerstandskörper betrachtet, die sich durch eine Quell- und Senkenbelegung auf der Kanalachse darstellen lassen. In der vorliegenden Arbeit werden diese Untersuchungen in zweierlei Hinsicht ergänzt: (I) Einmal wird nach der in der früheren Arbeit auseinandergesetzten Methode der Singularitätenbelegung der Fall eines durch einen Dipol dargestellten kurzen Widerstandskörpers behandelt, da für ihn ein deutlicherer Einfluß der Düse zu erwarten ist als in den früher betrachteten Fällen. Es zeigt sich, daß für einen im Freistrah befindlichen Körper die Geschwindigkeitskorrektur infolge des Düseneinflusses äußerst gering ist. Noch für Körper, welche sich einen Kanalradius von der Düse entfernt befinden, stimmt die Geschwindigkeitskorrektur praktisch mit der für den Freistrah überein. Erst bei noch größerer Annäherung an die Düse wird deren Wirkung merklich, und in einer Entfernung von etwa $\frac{1}{10}$ Kanalradius von der Düse heben sich die Geschwindigkeitskorrekturen infolge des Freistrahleinflusses und des Düseneinflusses auf. Schließlich ist bemerkenswert, daß sich die Zusatzgeschwindigkeiten außerhalb der Achse für Körper mäßiger Dicke nur wenig von denen auf der Kanalachse unterscheiden. — (II) Um den mit dem vorliegenden Randwertproblem zusammenhängenden Fragen grundsätzlich etwas weiter nachgehen zu können, wird noch das entsprechende ebene Problem behandelt. Dabei wird angenommen, daß sich der Kanal durch einen Parallelstreifen repräsentieren läßt, dessen Begrenzung in zwei Paare paralleler Halbgeraden entsprechend den festen Wänden des Kanals und den Grenzen des Freistrahls zerfällt. Das Problem besteht dann darin, der durch den Dipol (Widerstandskörper) erzeugten Strömung eine Zusatzströmung so zu überlagern, daß die den festen Wänden entsprechenden Halbgeraden Stromlinien, die den Freistrahlgrenzen entsprechenden Halbgeraden Potentiallinien werden. Die Lösung dieser Randwertaufgabe wird so durchgeführt, daß der Kanal konform auf ein Gebiet (Halbstreifen) abgebildet wird, bei dem sich die Randbedingungen durch Spiegelungen erfüllen lassen. Dabei erhält man ein Strömungspotential Φ_1 , das zwar den Randbedingungen genügt, aber insofern noch keine befriedigende Lösung der Aufgabe darstellt, als es an der Übergangsstelle Düse-Freistrah eine unendlich große Geschwindigkeit liefert, was physikalisch eine — in Wirklichkeit nicht eintretende — starke Verformung des Strahlrandes an den Enden der freien Grenzen bedeuten würde. Um dieser Schwierigkeit beizukommen, wird —

wieder mittels der genannten konformen Abbildung — ein zweites Potential Φ_2 konstruiert, das ebenfalls die Randbedingungen erfüllt und im Innern des Kanals singularitätenfrei ist, zu dem aber eine Strömung gehört, die die Düsenmündung im entgegengesetzten Sinne wie die zu Φ_1 gehörige Strömung mit unendlicher Geschwindigkeit umfließt. Unter den damit gewonnenen unendlich vielen Lösungen $\Phi_1 + \lambda \Phi_2$ (λ beliebig) der Randwertaufgabe gibt es eine, für welche die Geschwindigkeit auch an der Düsenmündung endlich ist, und sie wird die tatsächlichen Verhältnisse am besten wiedergeben. Physikalisch läßt sich das Hinzutreten des „Düsenpotentials“ Φ_2 dahin deuten, daß die Düse durch den Körper zum Teil versperst und daher im Kanalinnern der Druck höher, die Geschwindigkeit geringer wird als ohne den Körper. [Bei der unter (I) genannten Methode der Singularitätenbelegung für das räumliche Problem gelangt man sofort eindeutig zu der Lösung, welche das Unendlichwerden der Geschwindigkeit vermeidet, da die Belegung an der Kanalmündung nach Null geht.] — Die Verf. heben bez. der vorstehenden Betrachtungen noch grundsätzlich hervor, daß es bei Randwertaufgaben mit gemischten Bedingungen nicht immer möglich ist, eine Lösung so zu konstruieren, daß die Strömungsgeschwindigkeit am Rande durchweg endlich bleibt. Sie zeigen dies an dem Problem, die Anstellwinkelkorrektur in einem Windkanal mit teilweise offener und teilweise geschlossener Meßstrecke zu bestimmen.

F. Lösch (Rostock).

Schmitt, Pierre: Contribution à l'étude de l'écoulement autour de deux profils d'aile. C. R. Acad. Sci., Paris **215**, 400—401 (1942).

Zur Bestimmung der Potentialströmung um einen Doppelflügel muß man die konforme Abbildung des Außengebietes auf das Äußere zweier Kreise kennen; für letztere ist das Umströmungsproblem durch Lagally [Z. angew. Math. Mech. **9**, 299 bis 305 (1929)] gelöst. Verf. geht von zwei geeignet gewählten Kreisen aus und bildet zunächst den einen auf ein Profil ab, das etwa die vorgesehene Lage und Gestalt hat; hierbei werde der andere Kreis nur wenig deformiert. Diese (fast kreisförmige) Figur wird dann durch eine weitere Abbildung annähernd in das gewünschte andere Profil transformiert, ohne dabei das erste Profil wesentlich zu ändern. Verf. sagt, daß man bei diesem Verfahren durch geeignete Anordnung der Kreise die geometrischen Daten des Doppelflügels weitgehend in der Hand hat. — Ref. bemerkt, daß bereits Lösch [Luftfahrtforsch. **17**, 22—31 (1940)], ausgehend von dem vorgegebenen Doppelflügel, dieses Prinzip mit Erfolg angewendet hat.

Maruhn (Berlin).

Rotta, J.: Luftkräfte am Tragflügel mit einer seitlichen Scheibe. Ing.-Arch. **13**, 119—131 (1942).

Das Problem hat praktisches Interesse bei der Berechnung der am Seitenleitwerk eines Flugzeugs bei unsymmetrischen Bewegungen (z. B. Schieben) auftretenden Luftkräfte. Für das zentral angeordnete Seitenleitwerk stellt das Höhenleitwerk meist eine seitliche Scheibe dar. Die an Flügel und Scheibe auftretenden Luftkräfte und Momente werden nach der Prandtl'schen Tragflügeltheorie für den Optimalfall des geringsten induzierten Widerstandes (der induzierte Abwind ist über die Breite des tragenden Systems konstant) bestimmt. In diesem Fall kann die Rechnung auf das ebene Problem der Umströmung eines unendlich langen Zylinders zurückgeführt werden, dessen Querschnitt gleich der Projektion des tragenden Wirbelsystems in Flugrichtung ist. Diese Aufgabe wird durch konforme Abbildung dieses Zylinders auf einen Kreiszyylinder für eine zum Flügel symmetrische Scheibe bei beliebiger Größe, Lage und Neigung der Scheibe gegen den Flügel gelöst. Explizit durchgerechnet ist der Fall der auf dem Flügel senkrecht stehenden ebenen Scheibe, insbesondere der Fall der Endscheibe; die Ergebnisse (Auftrieb, Seitenkraft an der Scheibe und Lage der Kräfte) sind in Diagrammen dargestellt. Die Rechnung wird dann zur Abschätzung der beim schiebenden V-Flügel ohne Rumpf auftretenden Kräfte und Momente (Schiebeseitenkraft, Schieberollmoment) benutzt. Endlich wird der Einfluß der Rumpfanordnung auf das Rollmoment und die Seitenkraft im Schiebeflug überschlagen, wobei der Rumpf

als tragender Faden angesehen wird (was mit den Voraussetzungen der Theorie nicht ganz in Einklang zu bringen ist) und die Schiebeseitenkraft des schräg angeblasenen Rumpfes ohne Tragwerk in einer von H. Multhopp (Luftfahrtforsch. 18, 52) vorgeschlagenen Weise berücksichtigt wird. *W. Mangler* (Göttingen).

● **Müller, Wilhelm: Einführung in die Mechanik des Fluges. 2., neubearb. Aufl.** Leipzig: Dr. Max Jänecke Verlagsbuchhandl. 1942. V, 146 S. u. 76 Abb. RM. 3.80.

Unter Wahrung des Charakters einer Einführung in die Flugmechanik, die deren Grundzüge mit einfachen mathematischen Mitteln darstellen will, öffnet die zweite, erweiterte Auflage des vorliegenden Büchleins doch zugleich den Ausblick auch auf schwierigere dynamische Fragen. Die aeromechanischen Grundlagen (Tragflügel- und Propellertheorie) werden im 1. Abschnitt kurz dargelegt. Der 2. behandelt stationäre und angenähert stationäre Bewegungen; er ist um einen Absatz über den dynamischen Segelflug erweitert. Einige beschleunigte Längsbewegungen, Abfangen, Sturzflug, Start und Landung werden im 3. Abschnitt behandelt, dem Abschnitte über statische und dynamische Längsstabilität folgen. Der Schlußabschnitt befaßt sich mit den Seitenbewegungen des Flugzeugs, Kurvenflug, Spiralflug, Trudeln. — Konstruktive Wege der Schaffung von Spezialflugzeugen oder zur Stabilisierung werden gestreift. Die Formeln sind durch Beispielrechnungen anschaulich gemacht. *P. Jordan.*

Thermodynamik:

Mache, Heinrich: Zustandsgleichung und zweiter Hauptsatz. S.-B. Akad. Wiss. Wien IIa 151, 81—87 (1942).

Schreibt man die Zustandsgleichung $p = \varphi(v, T)$ in der Gestalt

$$p + \Phi(v, T) = T \cdot \Gamma(v, T),$$

so folgt zunächst durch partielle Differentiation nach T

$$(\partial p / \partial T)_v + (\partial \Phi / \partial T)_v = T(\partial \Gamma / \partial T)_v + \Gamma.$$

Im Falle, daß die Beziehung $(\partial \Phi / \partial T)_v = T(\partial \Gamma / \partial T)_v$ besteht, ist daher $\Gamma = (\partial p / \partial T)_v$. Wenn man experimentell nachweisen kann, daß $\Phi(v, T)$ den Kohäsionsdruck $(\partial u / \partial v)_T$ darstellt, so geht die Zustandsgleichung $p + \Phi = T \cdot \Gamma$ in die Grundgleichung des II. Hauptsatzes $p + (\partial u / \partial v)_T = T(\partial p / \partial T)_v$ (*) über unter der Voraussetzung, daß $(\partial \Phi / \partial T)_v = T(\partial \Gamma / \partial T)_v$ also nach obigem $\Gamma = (\partial p / \partial T)_v$ ist. [Der Satz vom ausgeschlossenen Perpetuum mobile II. Art wird somit hier durch die beiden Beziehungen $\Phi = (\partial u / \partial v)_T$ und $(\partial \Phi / \partial T)_v = T(\partial \Gamma / \partial T)_v$ zum Ausdruck gebracht. Die weitere Gleichung des II. H. S. $(\partial c_v / \partial v)_T = T^2(\partial^2 p / \partial T^2)$ folgt unmittelbar durch Differentiation aus dem Hauptsatz (*). Anm. d. Ref.] Die Gestalt der Zustandsgleichung, in welcher Φ und Γ diesen Bedingungen genügen, nennt Verf. „Normalform“. Man erhält sie auf Grund der Fundamentalgleichung (*) unmittelbar, indem man zur Zustandsgleichung $p - \varphi(v, T) = 0$ beiderseits $T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial T} \right)_v$ addiert: $p + T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial T} \right)_v - \varphi(v, T) = T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial T} \right)_v$ oder $p + \Phi(v, T) = T \cdot \Gamma(v, T)$ mit $\Phi = T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial T} \right)_v - \varphi(v, T)$ und $\Gamma = (\partial \varphi / \partial T)_v$. Es ist dann nach (*) $\Phi = (\partial u / \partial v)_T$ und $(\partial \Phi / \partial T)_v = T(\partial \Gamma / \partial T)_v$. Wenn man von einer Gestalt $p + f(v, T) = Tg(v, T)$ der Zustandsgleichung ausgeht, erhält man für die Funktionen Φ und Γ durch Einsetzen der Zustandsgleichung $\varphi = -f + Tg$ in die obigen Ausdrücke unmittelbar $\Phi = f + \alpha \cdot T$ und $\Gamma = g + \alpha$ mit $\alpha = T \left(\frac{\partial g}{\partial T} \right)_v - \frac{\partial f}{\partial T}$.

W. Glaser (Prag).

Laštovka, Zd.: Aufheizen und Abkühlen von Räumen bei zeitlich unterbrochenem Heizbetrieb. Forsch. Ing.-Wes. 13, 255—269 (1942).

1. Eine Wand aus Ziegelsteinen hat $\lambda = 0,75 \frac{\text{kcal}}{\text{m h Grad}}$, $c = 0,22 \frac{\text{kcal}}{\text{kg Grad}}$, $\gamma = 1705 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ und die Dicke $s = 0,5$ m. Die Anfangstemperatur und die Temperatur der Außenluft sind 0° . Auf der Innenseite ist die Dichte des eintretenden Wärme-

flusses konstant. Auf der Außenseite ist $\alpha = 20 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \text{ h Grad}}$. Die Temperatur wird berechnet, wobei die Ausgleichstemperatur durch die 4. Teilsumme ersetzt und der Rest nicht abgeschätzt wird. 2. Keine Wärmequelle entwickelt ihre volle Leistung unmittelbar, nachdem sie in Betrieb gesetzt ist. Am häufigsten verläuft die Dichte des eintretenden Wärmeflusses nach der Funktion $q(1 - e^{-a\nu^2 t})$. Als das zum veränderlichen Störungssummanden $-qe^{-a\nu^2 t}$ gehörige partikuläre Integral wird $\frac{q}{\lambda\nu} e^{-a\nu^2 t} \sin \nu x$ gewählt, worin ν eine Wurzel der Gleichung $\text{tg} \nu s = -\frac{\lambda}{\alpha s} \nu s$ sein muß. Der gegebene Wert $a\nu^2 = 1,1$ wird durch $a\nu_4^2 = 1,118$ ersetzt. 3. Ist in der Begrenzungsebene des Halbraumes, der die Anfangstemperatur 0° hat, die Dichte der einströmenden Wärmemenge eine gegebene Funktion der Zeit $q(t)$, so gilt für das Temperaturgefälle F die Differentialgleichung $\frac{\partial F}{\partial t} = a \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, die Anfangsbedingung $F=0$ und die Randbedingung $F = \frac{q}{\lambda}$, also $F = \frac{2}{\sqrt{\pi\lambda}} \int_0^\infty q\left(t - \frac{x^2}{4a\xi^2}\right) e^{-\xi^2} d\xi$. $\vartheta = \int_x^\infty F d\xi$.

Mit der Substitution $\eta = \xi - x$ folgt $\vartheta = \frac{2}{\sqrt{\pi\lambda}} \int_0^\infty \int_0^\infty q\left(t - \frac{(x+\eta)^2}{4a\xi^2}\right) e^{-\xi^2} d\xi d\eta$. Ist q konstant, so folgt aus $\vartheta = \frac{2q}{\sqrt{\pi\lambda}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi d\eta$ durch Produktintegration

$$\vartheta = \frac{q}{\lambda\sqrt{\pi at}} \int_0^\infty \eta e^{-\frac{(x+\eta)^2}{4at}} d\eta = 2 \frac{q}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{\pi}} t e^{-\frac{x^2}{4at}} - \frac{q}{\lambda} x \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \right\}.$$

In der Begrenzungsebene ist $\vartheta = 2 \frac{q}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{\pi}} t$. Anmerk. d. Ref.: In den Entwicklungskoeffizienten S. 256, Gleichung (9) $C_k = -2 \frac{q}{\lambda} \frac{\frac{\lambda}{\alpha} \sin \nu_k s + \frac{1 - \cos \nu_k s}{\nu_k}}{\nu_k s + \frac{\sin 2\nu_k s}{2}}$ heben sich die

Summanden mit $\sin \nu_k s$ und $\cos \nu_k s$ nach der Gleichung $\text{ctg} \nu_k s = \frac{\lambda}{\alpha} \nu_k$ fort, so daß die Berechnung der Konstanten C_k nicht „ziemlich mühsam und zeitraubend“ ist, wie der Verf. auf S. 257 behauptet. Entsprechend können die Entwicklungskoeffizienten S. 258, Gleichung (20)

$$C_k = q \left\{ -\frac{2}{\lambda} \frac{\frac{\lambda}{\alpha} \sin \nu_k s + \frac{1 - \cos \nu_k s}{\nu_k}}{\nu_k s + \frac{\sin 2\nu_k s}{2}} + \frac{\nu_k}{\lambda \nu (\nu^2 - \nu_k^2)} \frac{(\nu - \nu_k) \cos(\nu + \nu_k)s + (\nu + \nu_k) \cos(\nu - \nu_k)s - 2\nu}{\nu_k s + \frac{\sin 2\nu_k s}{2}} \right\}$$

zu $C_k = 2 \frac{q}{\lambda} \frac{\nu^2}{\nu_k^2 (\nu_k^2 - \nu^2) \left(s + \frac{\sin 2\nu_k s}{2\nu_k} \right)}$ vereinfacht werden, so daß sie nicht „ziemlich

verwickelt“ sind, wie der Verf. behauptet. Die Wurzeln ν_k und ν wird man nicht graphisch finden, sondern mit Fehlerabschätzung nach den Tafeln von Ufilas Meyer und Adalbert Deckert, Kempten 1924, berechnen, die $\text{tg} u$ für $u = 0,001, 0,002, 0,003, \dots, 1,569$ geben. Beim Aufheizen einer Wand durch konstante gleiche Wärmestromdichten ist im Beharrungszustande die Temperaturgeschwindigkeit nicht $\frac{q}{c\nu s}$,

S. 263, Gleichung (42), sondern $\frac{2q}{c\nu s}$; ihr Zahlenwert ($s = 0,38 \text{ m}$) ist nicht $1,40 \frac{\text{Grad}}{\text{h}}$, sondern $0,0140 \frac{\text{Grad}}{\text{h}}$.

Ludwig (Hannover).

Drossbach, Paul: Zur Theorie des Lichtbogenofens. Z. ges. Naturwiss. 8, 299—306 (1942).

Ist die Reaktionsgeschwindigkeit eine lineare Funktion der Temperatur, so ist auch die Ergiebigkeit der Wärmesenke eine solche: $-(a + b\vartheta)$. Die Differentialgleichung $\lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - (a + b\vartheta) = c\gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$ hat im Beharrungszustande das allgemeine Integral $\vartheta = K_1 \operatorname{Sin} \sqrt{\frac{b}{\lambda}} x + K_2 \operatorname{Cos} \sqrt{\frac{b}{\lambda}} x - \frac{a}{b}$. Wird an den Rändern $x=0$ und $x=\delta$ die Temperatur auf konstanten Werten ϑ_0 und ϑ_δ gehalten, so wird durch die Flächeneinheit des Randes $x = \delta$ während der Zeiteinheit die Wärmemenge

$$\sqrt{\lambda b} \left[\frac{\vartheta_0 + \frac{a}{b}}{\operatorname{Sin} \sqrt{\frac{b}{\lambda}} \delta} - \left(\vartheta_\delta + \frac{a}{b} \right) \operatorname{Ctg} \sqrt{\frac{b}{\lambda}} \delta \right]$$

abgeleitet. Ist der Rand $x=0$ wärmeundurchlässig, und strahlt der Rand $x=\delta$ nach dem Gesetz $-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \alpha(\vartheta - \vartheta_a)$, so haben die Differentialgleichung und die Randbedingungen ohne Störungssummanden das Integral $\vartheta = B e^{-\frac{\lambda k^2 + b}{c\gamma} t} \cos kx$, worin die Eigenwerte die Wurzeln der Gleichung $\operatorname{ctg} k\delta = \frac{\lambda}{\alpha\delta} k\delta$ sind. Anmerk. d. Ref.: Auf S. 300 ist im Wärmedurchgang Q_d und Q je ein Vorzeichen falsch; die letzten beiden Gleichungen sind falsch und sinnlos. Von S. 302 ab muß statt e^{bt} stehen e^{-bt} und statt \sqrt{b} muß stehen $\sqrt{\frac{b}{r}}$. S. 302, 11. und 13. Zeile auf der rechten Seite fehlt bei D der Faktor $\sqrt{\frac{b}{r}}$. Der Störungssummand in der Differentialgleichung wird von der Beharrungstemperatur und nicht auch von der Ausgleichstemperatur erfaßt, oder allgemeiner ausgedrückt: Zu einem Integral einer linearen Differentialgleichung mit Störungssummand dürfen nur Integrale der Differentialgleichung ohne Störungssummand und nicht weitere Integrale der Differentialgleichung mit Störungssummand addiert werden; daher muß von S. 302, 8. Zeile ab bei $\frac{a}{b}$ der Faktor 2 gestrichen werden. Auf S. 303 müssen in Δ_v die Indizes n durch v ersetzt werden; $K_{pq} = 0$, die Eigenfunktionen $\cos kx$ sind bereits orthogonal, das aufgestellte, aber nicht durchgeführte Programm ihrer Orthogonalisierung ist überflüssig. Ist die Anfangstemperatur ϑ_0 konstant, so ist

$$\begin{aligned} \vartheta = & \alpha \frac{\vartheta_a + \frac{a}{b}}{\sqrt{\lambda b} \operatorname{Sin} \sqrt{\frac{b}{\lambda}} \delta + \alpha \operatorname{Cos} \sqrt{\frac{b}{\lambda}} \delta} \operatorname{Cos} \sqrt{\frac{b}{\lambda}} x - \frac{a}{b} \\ & + \frac{\alpha}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\vartheta_0 + \frac{a}{b}}{k_n^2} - \frac{\vartheta_a + \frac{a}{b}}{\frac{b}{\lambda} + k_n^2} \right) \frac{\cos k_n \delta}{\frac{\sin 2k_n \delta}{2} + \frac{4k_n}{\lambda}} e^{-\frac{\lambda k_n^2 + b}{c\gamma} t} \cos k_n x. \end{aligned}$$

S. 304, letzte Gleichung die Konstante λ und die Indizes 2 sind falsch. Bei der Zylinderfunktion 2. Art fehlt im Argument der Faktor i . Ludwig (Hannover).

Elektrodynamik:

Cocci, Giovanni: Filtri con numero minimo di elementi. Alta Frequ. 11, 482—556 (1942).

Der Entwurf solcher Reaktanzvierpole (R.-V.) als elektrische Filter, die sich durch „Reaktanztransformation“ aus Tiefpässen (TP) mit im Sperrbereich konstant garantierter Mindestdämpfung ableiten lassen, wird nach der Betriebsparametertheorie (1) H. Piloty, Telegr.- u. Fernspr.-Techn. 28, 363—375 (1939); (2) 29, 249—258 (1940); (3) Ref., Ebenda 29, 185—192 u. 228—235 (1940); (4) Ref., Theorie der linearen Wechselstromschaltungen I, Leipzig 1941; dies. Zbl. 24, 373; (5) S. Darlington, J. Math.

Physics 18, 257—353 (1939)] durchgeführt. Verf. fußt dabei auf seiner Darstellung der Theorie [Alta Frequenza 10, 470—515 (1941)]. Die Kettenmatrix wird in der Rechnung bevorzugt und die Kettenschaltung ähnlich wie in (2) berechnet. Die Vorzüge der Betriebsparametertheorie werden u. a. durch Vergleich mit den in (4) nach der Wellenparametertheorie gerechneten Beispielen erörtert. In Übereinstimmung mit anderen Autoren wird festgestellt, daß den Vorzügen der Betriebsparametertheorie der erhebliche Rechenaufwand (z. B. bei höherwertigen Filtern achtstellige Rechnung erforderlich) gegenübersteht. — Der Forderung, bei gegebener Höchstdämpfung im Durchlaßbereich $[0 \leq z \leq 1, z = \text{normierte Frequenz}]$, im Sperrbereich $[z \geq k > 1]$ eine möglichst große Mindestdämpfung zu erzielen, entspricht die Aufgabe, eine gerade oder ungerade reelle rationale Funktion $\Phi(z)$ gegebenen Grades ϱ so zu bestimmen, daß unter der Nebenbedingung $|\Phi| \leq 1$ für $0 \leq z \leq 1$ der Mindestwert von $|\Phi|$ für $z \geq k$ möglichst groß $[M]$ wird. Zum Unterschied von anderen Darstellungen wird diese Aufgabe auch unter weiteren Nebenbedingungen der Art gelöst, daß Φ bei $z = \infty$ eine vorgeschriebene Anzahl von Polen besitzt und gegebenenfalls im geraden Fall [im ungeraden Fall ist immer $\Phi(0) = 0$] bei $z = 0$ verschwindet [*]. Bezeichne ϱ den Grad des Zählers und $2\sigma \leq \varrho$ den geraden Grad des Nenners von Φ . Behandelt werden [ohne exakte Beweisführung] die Fälle $\sigma = 0$ [Tschebyscheffsche Polynome]; für gerades ϱ $\sigma = 0^*$ [Ableitung durch lineare Transformation von z für $\frac{\varrho}{2}, \sigma = 0$ in z^2]; $2\sigma = \varrho - 2^*$ [übereinstimmend mit (5); Ableitung des Verf. durch lineargebrochene Transformation von z für $\frac{\varrho}{2}, \sigma = \left[\frac{\varrho}{2}\right]$ in z^2]; $\varrho = 5, \sigma = 1$; $\varrho = 6, \sigma = 1^*$; $\varrho = 7, \sigma = 1$. Falls eine realisierende Kettenschaltung ohne Gegeninduktivitäten möglich ist, enthält sie $\varrho + \sigma$ Schaltelemente für den erzeugenden TP. Oft bedeuten daher Schaltungen mit gleichem $\varrho + \sigma$ annähernd gleichen wirtschaftlichen Aufwand. Es wird gezeigt, daß für größere k (kleine Flankensteilheit) nicht maximale σ , sogar u. U. $\sigma = 0$ bei gleichem $\varrho + \sigma$ das größte M liefern, also den Vorzug verdienen. Gegenüber dem bei geradem ϱ wohlbekannten Fall a) $2\sigma = \varrho$ gestatten die Fälle b) $2\sigma = \varrho - 2^*$ und c) $2\sigma = \varrho - 2$ [vgl. (5); vom Verf. nicht behandelt] eine Realisierung ohne Gegeninduktivitäten; im Fall b) bei gleichem Generator- $[R_1]$ und Abschlußwiderstand $[R_2]$ auch ohne idealen Übertrager. Beachtenswert ist der Hinweis, daß auch bei vorgegebenem $R_1 : R_2$ durch Addition einer für alle Frequenzen konstanten Zusatzdämpfung zu einem symmetrischen oder antisymmetrischen R.-V., wodurch dieser den Charakter eines solchen verliert, ein idealer Übertrager vermieden werden kann. Die realisierende Schaltung kann bei anderer Bemessung dieselbe Struktur wie ein symmetrischer oder antisymmetrischer R.-V. haben. Daß in solchen Fällen c) etwas günstiger ist als b), wird nicht bemerkt.

Cauer (Berlin).

Buchholz, Herbert: Die Gegeninduktivität koaxialer Kreisringe in Gegenwart eines permeablen Kernes. Z. techn. Physik 23, 221—234 (1942).

Um die magnetische Kopplung koaxialer Stromringe bei Gegenwart eines gemeinsamen permeablen zylindrischen Kernes zu untersuchen, wird zunächst das magnetische Feld eines einzelnen Stromringes bei Vorhandensein eines solchen Kernes berechnet. Die erhaltene Lösung wird für den Fall abgeändert, daß der Stromring ein bandförmiger Leiter ist, und erweitert für den Fall, daß eine große Anzahl von Stromringen das magnetische Feld erregen. Für eine unendlich große Anzahl von Stromringen wird die Lösung am übersichtlichsten, aus ihr werden Formeln für die magnetische Kopplung zwischen dieser Anordnung und einem einzelnen Stromring abgeleitet, die für die numerische Rechnung geeignet sind.

J. Fischer (Frankfurt a. M.).

Agostinelli, Cataldo: Su di una proprietà del momento magnetico di una sfera. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 5, 1—5 (1942).

Es wird gezeigt, daß das magnetische Moment einer parallel ihrem Durchmesser magnetisierten Kugel gleich dem Koeffizienten des ersten Gliedes in der Entwicklung des Potentials nach Kugelfunktionen ist.

W. Glaser (Prag).

Goubau, Georg: Reziprozität der Wellenausbreitung durch magnetisch doppelbrechende Medien. Hochfrequenztechn. **60**, 155—160 (1942).

Das Reziprozitätstheorem von Lorentz ist bisher abgeleitet für Medien, die isotrop sind oder deren Materialkonstanten durch symmetrische Tensoren beschrieben werden. Da die Ionosphäre als magnetisch doppeltbrechendes Medium einen unsymmetrischen Tensor der Dielektrizitätskonstante besitzt, wird vom Verf. die Gültigkeit des Reziprozitätstheorems hierfür geprüft und gezeigt, daß es nicht allgemein gilt, sondern daß die Reziprozität von der Art des Strahlers abhängig ist, derart, daß es unter bestimmten Umständen zu jedem Strahler einen reziproken Strahler gibt, dessen Feld zusammen mit dem Feld des anderen Strahlers das Lorentzsche Reziprozitätstheorem erfüllt. Zwei derartige Antennen verhalten sich dann wie ein normaler Vierpol. Diese Ergebnisse werden an einem Beispiel ausgeführt. *J. Fischer* (Frankfurt a. M.).

Buchholz, Herbert: Die Abstrahlung einer Hohlleiterwelle aus einem kreisförmigen Hohlrohr mit angesetzttem ebenen Schirm. Arch. Elektrotechn. **37**, 22—32 (1943).

Verf. geht von den Formeln für das Strahlungsfeld eines elektrischen bzw. magnetischen Dipols aus, das er mit Hilfe der betr. Vektorpotentiale beschreibt, aus denen sich die elektrischen und magnetischen Feldstärken durch Differenzieren berechnen lassen. Wenn an Stelle von einzelnen Dipolen eine erregende Fläche auftritt, müssen entsprechende Integrale der Dipolstärken über diese Fläche ausgewertet werden. Beim Durchgang durch die Fläche erfahren die Feldstärken sowie ihre Normalableitungen sprunghafte Änderungen. Das Prinzip von Huyghens erlaubt die Feldverteilung innerhalb einer geschlossenen Hülle dadurch zu berechnen, daß als Erregungsursachen des inneren Feldes gedachte, in der Hülle liegende elektrische und magnetische Flächenströme betrachtet werden, deren Verteilung in einfacher Weise aus der Normalkomponente zur Hülle der elektrischen bzw. magnetischen Feldstärke hervorgeht. Verf. wendet dieses Prinzip zur Berechnung der Strahlung des offenen Endes eines Kreiszylinderrohres an, in welchem eine transversale magnetische Welle fortschreitet. Verf. faßt zunächst die Voraussetzungen zusammen, welche der Lösung dieser Aufgabe auf Grund der Näherung nach dem Prinzip von Huyghens zugrunde liegen. Die Beschränkungen, denen diese Näherungslösung unterliegt, werden hervorgehoben.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Optik:

Perrin, Francis: Polarisation de la lumière diffusée par les milieux isotropes troublés. J. Phys. Radium, VIII. s. **3**, 41—51 (1942).

Verf. betrachtet Lichtstreuung am trüben Medium, dessen optische Inhomogenitäten nicht klein sind gegen Lichtwellenlänge, so daß außer der Dipol- auch Multipolstreuung stattfindet. Ausgehend von der Stokesschen Kennzeichnung der mittleren Polarisierung eines Strahlenbündels durch vier charakteristische Konstanten stellt der Verf. den allgemeinsten linearen Zusammenhang zwischen den Kenngrößen des Primär- und denen des Streustrahls auf. Er zeigt, daß die 16 Verknüpfungskoeffizienten, welche den Streuer optisch beschreiben, sich infolge des optischen Reziprozitätssatzes auf 10 unabhängige Eigenschaften reduzieren. Für einen symmetrischen Streuer vermindert sich ihre Zahl weiter auf 6. Eine von Krishnan angegebene Formel erweist sich als nur für symmetrische streuende Medien richtig. Der Vergleich mit der Dipolstreuung ergibt charakteristische Abweichungen (Elliptizität des Streulichts), vor allem wenn das einfallende Bündel schief zur Streuebene linear polarisiert ist.

Fues (Breslau).

Baker, T. Y.: Spherical aberration in optical systems. Proc. phys. Soc., Lond. **53**, 531—537 (1941).

Der durch den Öffnungsfehler entstehende Zerstreuungskreis soll möglichst klein gemacht werden. — Wenn nur das erste Glied zu berücksichtigen ist, tritt dies bekanntlich ein, wenn die Auffangebene um $\frac{3}{4}$ der Randabweichung vom Gaußschen

Bildpunkt abliegt. Kommt auch das zweite Glied in Frage, so hat der Schnitt der kaustischen Fläche mit einer Meridianebene einen Doppelpunkt auf jeder Seite der Achse; es wird empfohlen, die Auffangebene an diese Stelle zu legen, die Öffnung aber nicht größer zu machen als bis zu den äußeren Strahlen, die durch diese beiden Punkte hindurchgehen. Bei Berücksichtigung des dritten oder auch noch des vierten Gliedes sei es zweckmäßig, die Fehler so auszugleichen, daß die erwähnte Kurve einen dreifachen (vierfachen) Punkt habe und die Öffnung entsprechend zu beschränken. „Offenbar ist der Verlauf des Öffnungsfehlers nicht so zu wünschen, daß am Rande Überbesserung ist, sondern so, daß überall Unterbesserung besteht, mit Beträgen, die zwischen größeren und kleineren Werten schwanken. Ist dies nicht erreichbar, und verläuft die Abweichung nach dem Rande zu im Sinne der Überbesserung, so wird durch Mitnehmen der überbesserten Teile nichts gewonnen.“ — In der Arbeit wird auf die Helligkeitsverteilung innerhalb des Zerstreuungskreises und auf die Beugungserscheinungen keine Rücksicht genommen. *Hans Boegehold (Jena).*

Bouma, P. J.: Mathematical relationship between the colour vision systems of trichromats and dichromats. *Physica, Haag* 9, 773—784 (1942).

Die Arbeit behandelt die Wahrnehmung von Farbgemischen durch solche Beobachter, die den Dreifarbensinn besitzen und vom Verf. als Trichromaten bezeichnet werden, und durch solche Beobachter, die nur einen Zweifarbensinn haben, die sogenannten Rotblinden oder Protanopen und die sogenannten Grünblinden oder Deutanopen. Er diskutiert zunächst die experimentellen Gesetze, die die Farbwahrnehmung der Trichromaten und Dichromaten beherrschen, und vergleicht das Auge mit einem System von drei bzw. zwei Photozellen. Ausgehend von den Grassmannschen Gesetzen und experimentellen Tatsachen, die sich auf die Farbenanalyse eines Farbgemisches beziehen, wie sie ein Trichromat und ein Dichromat vornehmen würde, zeigt der Verf., daß die dichromatischen Verteilungskurven lineare Funktionen der trichromatischen Verteilungskurven sind, und daß sich bei geeigneter linearer Transformation diese Verteilungskurven, die den spektralen Empfindlichkeiten der Photozellen entsprechen, auf eine vom Verf. angegebene Form bringen lassen. Die Funktionen dieses Formenschemas werden numerisch auf Grund experimenteller Untersuchungen Pitts über Dichromaten bestimmt. Die Ergebnisse werden in Verbindung mit der Young-Helmholtz-Königschen Theorie der Farbwahrnehmung und in Verbindung mit den Experimenten über Farbadaptation (von Wright) näher diskutiert. *Picht (Neubabelsberg).*

Relativitätstheorie:

Jonsson, Carl Victor: Dirac's wave equation in five-dimensional relativity theory. *Ark. Mat. Astron. Fys.* 28 B, Nr 17, 1—7 (1942).

In der fünfdimensionalen Relativitätstheorie ergibt sich das Massenglied in der Wellengleichung für geladene Teilchen gewöhnlich als kleine Differenz zweier Zahlen, die etwa 10^{20} mal größer sind. Verf. zeigt, daß man diese formale Schwierigkeit in der homogenen Formulierung der Theorie bei geeignetem Ansatz der Wellengleichung vermeiden kann. Bei Vernachlässigung der Gravitation stimmt die diskutierte Wellengleichung bis auf ein praktisch unbeobachtbares magnetisches Moment mit der Diracschen überein. Von der Paulischen Wellengleichung im Gravitationsfeld unterscheidet es sich um ein Glied der relativen Größenordnung 10^{-20} . *Fritz Bopp.*

Atomphysik.

Statistik und kinetische Theorie der Materie:

Géhéniau, J.: Les phénomènes de diffusion, dans la mécanique statistique de Th. de Donder. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 28, 283—293 (1942).

Die Grundgleichungen der Diffusion werden im Rahmen der „Neuen statistischen Mechanik“ von De Donder aus dessen Transportgleichung abgeleitet: 1. Transport-

gleichung, 2. Massentransport, 3. Transport der Bewegungsgröße, 4. Transport der Energie, 5. Transport der Entropie.

Fritz Bopp (Berlin-Dahlem).

Donder, Th. de: Sur les équilibres chimiques stables et les équilibres chimiques instables. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 28, 496—500 (1942).

Die bekannten Bedingungen für chemisches Gleichgewicht werden mathematisch formuliert.

Waldmann (Berlin-Dahlem).

Elektronentheorie:

Svartholm, N.: Berechnung magnetischer Linsen mit gegebener Feldform. Ark. Mat. Astron. Fys. 28 B, Nr 16, 1—8 (1942).

Eine Klasse typischer, in der Elektronenoptik verwendeter Magnetfelder hat die Gestalt $H(z) = H_z(0, z) = H_0 \left/ \left[1 + \left(\frac{z}{a} \right)^2 \right]^\mu \right.$. $\mu = \frac{3}{2}$ entspricht einem Kreisstrom; Polschuhfelder lassen sich, wie J. Dosse [Z. Physik 117, 722 (1941)] und K. Siegbahn (Ark. Mat. Astron. Fys. 1942) gezeigt haben, sehr gut mit anderen Werten von μ , z. B. $\mu = 2$ und $\mu = 3$ wiedergeben. Die Differentialgleichung $r'' + \frac{e}{8mU} H^2 r = 0$ der achsennahen Bahnen läßt sich für diese Felder nach Glaser durch die Substitution $z = a \operatorname{ctg} \varphi$ und $r = av(\varphi)/\sin \varphi$ auf die Gestalt $v''(\varphi) + (1 + k^2 \sin^2 \kappa \varphi) v(\varphi) = 0$ bringen, wobei $k^2 = eH_0^2 a^2 / 8mU$, $\kappa = 2\mu - 2$ ist. Man sieht, daß für $\mu = 1$ ($\kappa = 0$) die Lösung unmittelbar auf trigonometrische Funktionen führt, während für $\kappa \neq 0$ obige Differentialgleichung zu den Hillschen Differentialgleichungen gehört. Verf. löst sie nach einer Methode, die eine Verallgemeinerung einer Methode von Ince für die Lösung der Mathieuschen Gleichung ($\kappa = 1$) darstellt in zweiter Näherung. Für kleine Werte von k^2 wird die Lösung durch eine Störungsrechnung gefunden. Für eine von K. Siegbahn (Ark. Mat. Astron. Fys. 1943) verwendete Linse mit den Parametern $\mu = 2$ und $k^2 = 0,60263$ wurden die numerischen Rechnungen durchgeführt und die so bestimmten Werte von Brennweite und Brennpunktslage in vorzüglicher Übereinstimmung mit den Messungen gefunden.

W. Glaser (Prag).

Marschall, H., und W. Schröder: Die Bestimmung der mittleren Bildwölbung doppelsymmetrischer Ablenkspulen für Kathodenstrahlröhren. Z. techn. Physik 23, 297—306 (1942).

Für ein magnetisches Ablenkkfeld mit zwei aufeinander senkrechten Symmetrieebenen werden die von der Theorie gelieferten Formeln für den Astigmatismus und die Bildwölbung eingehend diskutiert und die Ausdrücke für die Krümmungsradien von tangentialer, sagittaler und mittlerer Bildwölbung anschaulich hergeleitet. Die mittlere Bildwölbung eines Ablenkkfeldes ist stets von Null verschieden. Diese wird für eine anastigmatische Ablenkspule gemessen und mit den berechneten Werten in befriedigender Übereinstimmung gefunden. Zur Messung wird eine Braunsche Röhre benutzt, auf deren Bildschirm das Strahlenbündel streifend auffällt, wobei die Bildkrümmungskurve auf dem Schirm direkt sichtbar gemacht und ausgemessen werden kann. Durch Einführung eines „abgehackten“ homogenen Ersatzfeldes von bestimmter Länge für das vorgegebene Ablenkkfeld kann für die Bildkrümmung eine einfache Formel angegeben werden, durch welche die exakten Rechnungen und die Messungen gut dargestellt werden. Zum Schluß werden noch Faustformeln für den Praktiker zur Bestimmung der Ersatz-Feldlänge einiger Typen von Ablenkspulen angegeben.

W. Glaser (Prag).

Recknagel, A.: Das Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskops für Selbststrahler. Z. Physik 120, 331—362 (1943).

Unter der Voraussetzung, daß die Auflösungsbegrenzung im Emissionsmikroskop in erster Linie durch die optischen Eigenschaften des Beschleunigungsfeldes bedingt ist, wird die Anordnung durch ein homogenes Beschleunigungsfeld und eine fehlerfreie

Elektronenlinse schematisiert. An der Kathode wird im Durchstoßpunkt mit der optischen Achse eine punktförmige Elektronenquelle angenommen und auf Grund der Schrödingerschen Wellengleichung der Elektronenstrom im homogenen Beschleunigungsfeld untersucht. Die Wellenfunktion der Punktquelle wird allgemein für ein beliebiges, allein von der axialen Koordinate z abhängendes Potential $\Phi(z)$ dargestellt. Für zwei spezielle unstetige Beschleunigungsfelder: 1. $\Phi(z) = U$ für $z > l$, $\Phi(z) = \Phi_m$ für $z < 0$, $\Phi(z) = \frac{U}{l}z$ für $0 < z < l$ und 2. $\Phi(z) = U$ für $z > l$ und $\Phi(z) = U \frac{z}{l}$ für $z < l$ werden unter gewissen Näherungsannahmen die Integrale für die Wellenfunktionen numerisch ausgewertet und die Intensitäten für zwei spezielle Einstellebenen und für 5 Werte des Parameters $\kappa_e = (4\pi\epsilon/3\lambda_k E)^{\frac{2}{3}}$ kurvenmäßig wiedergegeben. ϵ bedeutet hierbei die Austrittsenergie der Elektronen, E und λ_k sind Feldstärke und Elektronenwellenlänge an der Kathode. Die auflösbare Strecke liegt etwa in der Größenordnung der Wellenlänge λ_k . Damit sollte beim Emissionsmikroskop noch eine Strecke von etwa $5\text{ m}\mu$ auflösbar sein. Das Auflösungsvermögen wächst mit der Feldstärke, und zwar schwächer als dies aus geometrisch-optischen Überlegungen folgt. Mit wachsender Feldstärke geht der Elektronenstrom immer mehr über die Grenze des geometrisch-optisch erlaubten Strahlenkegels hinaus (Tunneleffekt). Dadurch muß schließlich eine mechanische Ausblendung eintreten, auch wenn dies geometrisch-optisch gar nicht möglich ist. Auf diese Weise wird eine grundsätzliche Auflösungsgrenze festgelegt, die der optischen Auflösungsgrenze entspricht. [Bemerk. d. Ref.: Der gesamte Feldverlauf wird natürlich als rotationssymmetrisch vorausgesetzt. Nun ist aber das einzige rotationssymmetrische, allein von der z -Koordinate abhängende, elektrische Potential φ dasjenige, welches längs der ganzen z -Achse durch einen linearen Ausdruck gegeben ist. Dies folgt unmittelbar aus der rotationssymmetrischen Gleichung $\Delta\varphi = 0$, z. B. durch Lösung in Reihenform $\varphi = \Phi(z) - \frac{r^2}{4}\Phi''(z) + \dots$. Nur wenn überall $\Phi''(z) = 0$ ist, wird φ von r unabhängig. An jeder Stelle, wo $\Phi''(z) \neq 0$ ist und um so mehr also auch dort, wo $\Phi'(z)$ unstetig ist, treten radiale Feldkomponenten auf. Gerade diese sind für die Linsenwirkung des Feldes maßgebend (z. B. Rohrlinsen). Aus diesem Grunde scheint dem Ref. die Annahme eines allein von z und infolge der vorausgesetzten Unstetigkeiten stark von z abhängenden Feldes mit der Annahme eines rotations-symmetrischen Potentialfeldes unvereinbar.] W. Glaser (Prag).

Spangenberg, Karl: Use of the action function to obtain the general differential equations of space charge flow in more than one dimension. J. Franklin Inst. 232, 365—371 (1941).

Verf. gibt eine Formulierung der zur Berechnung des Raumladungsstromes im mehrdimensionalen Fall notwendigen Differentialgleichungen mit Hilfe der Wirkungsfunktion. Zum Unterschied von den bekannten Fällen der ebenen und rotations-symmetrischen Anordnung sind im mehrdimensionalen Fall die Elektronenbahnen nicht mehr Geraden, sondern allgemein dadurch bestimmt, daß sie die orthogonalen Trajektorien der Flächen konstanter Wirkung $A = \int m v ds$ darstellen. m bedeutet hierbei die Elektronenmasse, v die Elektronengeschwindigkeit und ds das Bogenelement auf der Bahnkurve. Ist E das elektrische Potential, ρ die Raumladungsdichte, $-e$ die Elektronenladung und J die Stromdichte, so folgt zunächst aus $A = mv$ grad $A = \nabla A$. Ist E so normiert, daß es zugleich mit der Elektronengeschwindigkeit Null ist, so folgt aus dem Energiesatz $\frac{m}{2}v^2 = eE$ für das elektrische Potential $E = (1/2m)(\nabla A)^2$ (Hamilton-Jacobische Differentialgleichung). Die Raumladung folgt aus der Poissonschen Gleichung zu $\rho = -1/4\pi \nabla^2 E = -(1/8\pi m)\nabla^2 \cdot (\nabla A)^2$. Der Strom J wird $J = \rho v = -(1/8\pi m^2)[\nabla^2 \cdot (\nabla A)^2] \cdot \nabla A$. Aus der Kontinuitätsgleichung $\text{div } J = \nabla J = 0$ folgt schließlich die Differentialgleichung für die Wirkungsfunktion A in der Gestalt (*) $\nabla \cdot \{\nabla^2 (\nabla A)^2 \cdot \nabla A\} = 0$.

Diese partielle Differentialgleichung für A ist allerdings außerordentlich kompliziert. Sie erhält z. B. im eindimensionalen Fall $A(x)$ die Gestalt $4A'A''A''' + (A'')^3 + (A')^2 A^{(4)} = 0$. Auch für den zweidimensionalen Fall wird der explizite Ausdruck der entsprechenden partiellen Differentialgleichung angeschrieben, wobei der Verf., ohne selbst den Versuch zur Lösung dieser aus 22 Gliedern bestehenden, nichtlinearen Gleichung zu machen, die Hoffnung ausspricht, daß sie das Interesse kompetenter Mathematiker finden möge. Weiters wird gezeigt, daß sich mit dem Ansatz $A = kx^n$ aus der oben angeschriebenen Gleichung für den eindimensionalen Fall für n die möglichen Werte $n=0, 1, \frac{3}{2}$ und $\frac{5}{2}$ ergeben, von denen der letztere der bekannten Lösung $J \sim E^{\frac{3}{2}}/x^2$ entspricht. Verf. weist zum Schluß darauf hin, daß es nur nötig sei, Lösungen der erwähnten Differentialgleichung (*) zu bestimmen, um die Lösung des zweidimensionalen Problems zu erhalten. (Wie jedoch schon das rotationssymmetrische Feld zeigt, dürfte auch hier vor allem die Befriedigung der Randbedingungen, auf welche Verf. überhaupt nicht eingeht, auf Schwierigkeiten stoßen, selbst wenn man Lösungen der Differentialgleichung für A bestimmt hat.) W. Glaser (Prag).

Borgnis, F., und E. Ledinegg: Der Einfluß einer Phasenfokussierung höherer Ordnung auf die Fourierkomponenten der Strahlstromdichte. Z. techn. Physik 23, 306—312 (1942).

Es wird gezeigt, daß bei Verwendung einer mit Grund- und erster Oberwelle angesteuerten Linse bei kleinen Aussteuerungen die Fourieramplituden der Stromdichte höher werden als bei Anwendung einer rein harmonischen Steuerspannung. Für bestimmte Verhältnisse k der Amplituden von Grund- und erster Oberwelle erhalten die Stromamplituden ihren größten Wert. Diese Werte von k fallen nicht notwendig mit denen zusammen, welche zu bester Phasenfokussierung führen. Weiter wird untersucht, bei welchem zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeitsmodulation an der Steuerlinse der Leitungswechselstrom den größtmöglichen Wert annimmt. Dies ist der Fall, wenn sämtliche Elektronen einer Periode in einen einzigen Punkt fokussiert werden, also für die sogenannte „korrigierte Phasenlinse“. W. Glaser (Prag).

Nicht-relativistische Quantentheorie:

Einstein, Albert: Considerations concerning the fundaments of theoretical physics. Science, New York 91, 487—492 (1940).

Historische Darstellung der Entwicklung der Fundamente der theoretischen Physik (d. h. derjenigen Theorien der Physik, welche die phänomenologischen Einzeldisziplinen zu einer einheitlichen Wissenschaft zusammenschließen). Behandelt werden: Mechanik des Massenpunkts, Feldtheorie des Elektromagnetismus, Relativitätstheorie, Quantentheorie. Eine allumfassende Theorie existiert bis heute nicht. Die Quantenphänomene konnten nicht auf Feldphänomene zurückgeführt werden. Den Verzicht der Quantentheorie auf eine Objektivierung der Aussagen über die Natur hält Verf. nicht für befriedigend, ohne jedoch eine andere Lösung angeben zu können. C. F. v. Weizsäcker.

Mecke, R.: Wege und Ziele der Theorie in der Physik. Ber. naturforsch. Ges., Freiburg i. Br. 37, 128—143 (1942).

Schilderung des Zusammenhangs von physikalischem und mathematischem Denken an Hand des Werdegangs der Wellentheorie der Materie. C. F. v. Weizsäcker.

March, Arthur: Raum, Zeit und Naturgesetze. Naturwiss. 31, 49—59 (1943).

Bericht über die Untersuchungen von A. March und E. Foradori über das Problem der „kleinsten meßbaren Länge“. Verschiedene Erfahrungen weisen darauf hin, daß es eine untere Schranke l_0 ($\sim 10^{-13}$ cm) der erreichbaren Genauigkeit von Längenmessungen und eine entsprechende Schranke t_0 für Zeitmessungen gibt. Dem entspricht die „Beschränkungsrelation“, daß der Energie- und Impulsumsatz bei jedem Prozeß durch die Gleichung $|(\Delta p)^2 - (\Delta E/c)^2| < (\hbar/2l_0)^2$ beschränkt ist. Verf.¹ ist der Ansicht, daß damit nicht eine „Unanwendbarkeit der Geometrie im kleinen“

gegeben ist, da man Längen zwar nicht durch eine einzelne Messung, wohl aber, in statistischer Weise, durch eine große Anzahl von Messungen genauer definieren könne. Die Darstellung des geometrischen Kontinuums nicht als Punktmannigfaltigkeit, sondern auf Grund von Teilbarkeitsaxiomen im Sinne von Foradori gibt das mathematische Gerüst dieser Theorie.

C. F. v. Weizsäcker (Straßburg).

Planck, Max: Zur Geschichte der Auffindung des physikalischen Wirkungsquantums. *Naturwiss.* **31**, 153—159 (1943).

Barnóthy, J.: Über den Wertebereich der physikalischen Mengen. 1. *Z. Physik* **120**, 148—164 (1943).

Jede physikalische Messung vergleicht zwei Mengen gleicher Dimension. Es werden einige Folgen der Annahme diskutiert, daß die Menge der möglichen Vergleichszahlen in jedem Fall endlich ist (Atomismus und Beschränktheit der physikalischen Größen).

C. F. v. Weizsäcker (Straßburg).

Katz, E.: A „non-atomic“ example of complementarity. *Physica*, Haag **9**, 954—956 (1942).

Die gesamte Empfindlichkeit und die lokale Empfindlichkeit eines AgBr-Kornes in einer photographischen Platte sind, wie Verf. erläutert, „komplementäre“ Größen, insofern beide nicht gleichzeitig genau gemessen werden können. Es handelt sich um eine Analogie zur quantentheoretischen Komplementarität.

Fierz (Basel).

Haenzel, G.: Die Polygonfläche und das periodische System der Elemente. *Z. Physik* **120**, 283—300 (1943).

Zwei Seiten dieser Arbeit sind dem Studium der ganzen transzendenten Funktion

$$f(z) = - \prod_{\nu=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{2\nu-1}\right)$$

gewidmet. Der Inhalt der übrigen Teile deckt sich in der Hauptsache mit der in dies. Zbl. **27**, 185 referierten Arbeit; nur daß jetzt die Radien der konzentrischen Kreise nicht gleich 1, 3, 5, . . . gewählt werden, sondern so, daß dem ersten Kreis ein Dreieck umschrieben werden kann, welches dem zweiten einbeschrieben ist, ebenso dem zweiten ein Fünfeck usw.

van der Waerden (Leipzig).

Pry, G., et I. Prigogine: Sur le calcul des niveaux énergétiques à l'aide de la méthode de Wentzel-Kramers-Brillouin. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. **28**, 652—659 (1942).

Bei Anwendung der WKB-Methode auf eindimensionale Fälle erscheint der gesuchte Eigenwert der Energie als Parameter in einer Integralgleichung. Mit Hilfe von Taylorentwicklungen der potentiellen Energie und des Integrals in der Gleichung nach einem geeigneten Parameter ergeben sich praktische Formeln zur Berechnung der Energiewerte. Die Entwicklungen sind gerade so beschaffen, daß beim harmonischen Oszillator bei beiden nur das erste Glied auftritt.

F. Hund (Leipzig).

Wheeler, John A., and Rupert Wildt: The absorption coefficient of the free-free transitions of the negative hydrogen ion. *Astrophys. J.* **95**, 281—287 (1942).

Parodi, M.: Calcul des frequences propres des chaines aliphatiques normales; application à la structure des paraffines. *J. Phys. Radium*, VIII. s. **2**, 58—62 (1941).

Die aliphatischen Ketten werden als ebene, regelmäßige, geknickte Folgen von Massenpunkten idealisiert; ihre Frequenzen werden berechnet unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Massen der Endglieder von den übrigen Massen verschieden sind. Unter bestimmten Bedingungen für Massen, Kräfte und Winkel gibt es Frequenzen, die von der Zahl der Kettenglieder unabhängig sind. Die beobachteten Frequenzen dieser Art können so erklärt werden.

F. Hund (Leipzig).

Waller, Ivar: On the conductivity of a metal in a magnetic field. *Ark. Mat. Astron. Fys.* **28 B**, Nr 15, 1—7 (1942).

Aus der bekannten und stets als Ausgangspunkt für solche Berechnungen benützten Grundgleichung für die Elektronenverteilung bei Anwesenheit eines elektrischen

und magnetischen Feldes sowie eines Temperaturgefälles wird erstens die Gültigkeit des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes für beliebige Magnetfelder erneut bewiesen und zweitens eine Reihenentwicklung für den elektrischen und den Wärmestrom nach Potenzen der magnetischen Feldstärke angegeben. Die Rechnungen weichen im Gang nur wenig von den entsprechenden Betrachtungen von J. Meixner und M. Kohler (in verschiedenen Arbeiten der letzten Jahre in den *Annalen der Physik*; vgl. z. B. dies. Zbl. 20, 86; 26, 39, 186) ab und stimmen in den Resultaten mit ihnen überein.

F. Sauter (München).

Sauter, Fritz: Zur Theorie der metallischen Elektrizitätsleitung. *Ann. Physik*, V. F. 42, 110—141 (1942).

Kritische Bemerkungen zur Theorie der metallischen Elektrizitätsleitung: 1. Das Bloch'sche Verfahren ist aus zwei Gründen bedenklich; erstens sind die von ihm verwendeten Eigenfunktionen nur für völlig ideale Kristalle, nicht aber für einen Real-kristall, ein kristallines Gefüge oder eine metallische Flüssigkeit gültig, und zweitens kann wegen der starken Wechselwirkung zwischen den Elektronen und Gitterschwingungen nicht mehr von einer scharfen Energieübertragung zwischen ihnen gesprochen werden, so daß das ganze Näherungsverfahren nicht mehr zulässig erscheint. Letzteres wäre nur bei so schwacher Wechselwirkung der Fall, daß man auch in erster Näherung mit freien Elektronen im Metallgitter rechnen kann. — 2. Bei der Berechnung der Gleichgewichtsverteilung für die Elektronen in einem äußeren elektrischen Feld besteht ein bisher noch nicht gelöstes Problem in der Angabe einer Bedingung für die Streuwahrscheinlichkeit der Elektronen im Gitter, deren Erfüllung für die Ausbildung eines Gleichgewichtszustandes im elektrischen Feld notwendig ist. — 3. Rechnet man mit freien Elektronen als erster Näherung, so gewinnt die Leitfähigkeitstheorie ganz wesentlich an Einfachheit und Klarheit. Man findet durch konsequente Weiterführung einer von Houston angegebenen Methode in einfacher Weise für hohe Temperaturen die Proportionalität des Widerstandes mit T , während man für tiefe Temperaturen durch korrespondenzmäßige Betrachtungen zu einer Stationaritätsgleichung geführt wird, welche im wesentlichen mit der Bloch'schen Integralgleichung übereinstimmt. Aus dieser werden Schranken für den Widerstand bei tiefen Temperaturen abgeleitet, welche zeigen, daß das T^5 -Gesetz nur bei starker Abschirmung der Gitterionen zu erwarten ist, während sich der Widerstand bei schwacher Abschirmung mit einer kleineren Potenz von T ändern muß.

F. Sauter (München).

● **Burdon, R. S.:** Surface tension and the spreading of liquids. (*Cambridge physical tracts.*) Cambridge: Cambridge univ. press. 1940. X, 85 pag. 7/6.

Relativistische Quantentheorie:

Flammersfeld, A., P. Jensen und W. Gentner: Die Aufteilungsverhältnisse und Energietönungen bei der Uranspaltung. *Z. Physik* 120, 450—467 (1943).

Untersuchung der Spaltung mit thermischen Neutronen. Die Spaltungsenergie schwankt zwischen 120 und 180 MeV. Energie- bzw. Massenverhältnisse schwanken zwischen 0,4:1 bis fast 1:1. Gleich schwere Bruchstücke werden praktisch nicht beobachtet. Häufigster Prozeß: Gesamtenergie 151 MeV und Massenverhältnis 96:140. Häufigste Energie des schweren Bruchstücks 58 MeV, des leichten 87 MeV. Zu einer bestimmten Gesamtenergie sind zahlreiche Massenverhältnisse, zu einem bestimmten Massenverhältnis verschiedene Werte der Gesamtenergie möglich. Mit zunehmender Gesamtenergie nähern sich die zugehörigen Massenverhältnisse im Mittel dem Wert 1:1. Bei gegebener Energie des einen Spaltungsteilchens ändert sich die mittlere Energie des anderen nicht wesentlich mit der des ersten. Mit den Voraussagen der Theorie von Bober und Wheeler besteht qualitative Übereinstimmung, insbesondere hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen Gesamtenergie und Massenaufspaltung.

K. Wirtz (Berlin-Dahlem).

Langevin, Paul: Sur les chocs entre neutrons rapides et noyaux de masses quelconques. *Ann. Phys., Paris* **17**, 303—317 (1942).

Wenn die Streuung schneller Neutronen an Protonen kugelsymmetrisch erfolgt, so nimmt die Energie des Neutrons nach dem Stoß jeden Wert zwischen dem Maximalwert E_0 (Energie vor dem Stoß) und dem Minimalwert $\alpha^2 E_0$ [zentraler Stoß, $\alpha = (M - m)/(M + m)$] mit gleicher Wahrscheinlichkeit an. Die Größe $w_1 = (E - \alpha^2 E_0)/E_0(1 - \alpha^2)$ ist also die Wahrscheinlichkeit, daß der erste Stoß in das Energieintervall $\alpha^2 E_0 \dots E$ führt. Denkt man sich die Größe w_1 und die entsprechenden Größen w_2, w_3, \dots für die weiteren Stöße auf den Achsen eines Koordinatensystems von entsprechender Dimensionszahl aufgetragen, so erfüllen alle möglichen Fälle das Innere des Einheitswürfels mit „konstanter Dichte“. Eine bestimmte Endenergie definiert eine Hyperboloidfläche in diesem Raum. Die Wahrscheinlichkeit, daß etwa der n -te Stoß in ein bestimmtes Energieintervall hineinfällt, erscheint in dieser Darstellung als eine Volumgröße, die für einfache Fälle berechnet wird. Durch Summation über n erhält man die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutron im Laufe seiner Verlangsamung überhaupt in dieses Energieintervall gelangt. Für ein differentiell kleines Energieintervall läßt sich diese Größe mit Hilfe einer Rekursionsformel angeben. Das Resultat ist

$$dW = \frac{dE}{E_0(1 - \alpha^2)} \sum_{k=0}^i (-1)^k \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\log E_0/E}{1 - \alpha^2} + k \right) \left(\frac{\log E_0/E}{1 - \alpha^2} \right)^{k-1} \cdot \left(\frac{E_0}{E} \right)^{\frac{1}{1 - \alpha^2}}$$

wo $i + 1$ die Zahl der Stöße angibt, die mindestens erforderlich sind, um zu dieser Energie zu gelangen.

H. Volz (Berlin).

Ferretti, B.: Considerazioni sulle forze nucleari, ed alcuni risultati sperimentali sulla diffusione per urto dei neutroni contro i protoni. *Nuovo Cimento*, IX. s. **1**, 25—32 (1943).

Verf. zeigt zunächst, daß die experimentell gefundene Anisotropie der Neutron-Proton-Streuung (vgl. nachsteh. Ref.) ein sehr gutes Mittel zur Prüfung phänomenologischer Ansätze für die Kernkräfte darstellt, und weist auf die Notwendigkeit hin, solche Experimente auch bei anderen Neutronenenergien auszuführen. Mit Hilfe der Ansätze von Möller und Rosenfeld (dies. Zbl. **23**, 287) versucht Verf. die Richtungsverteilung der gestreuten Neutronen auszurechnen. Dazu werden nur die statischen Glieder der Wechselwirkung mitgenommen, da von den nichtstatischen Gliedern kein wesentlicher Beitrag erwartet werden kann. Für Kraftreichweiten größer als $2 \cdot 10^{-13}$ cm ergibt die Rechnung das falsche Vorzeichen der Anisotropie, für kleinere Reichweiten zwar richtiges Vorzeichen, aber viel zu kleine Beträge. Wenn man den nichtstatischen Gliedern nicht einen unwahrscheinlich hohen Beitrag zuschreiben will, muß man das Ergebnis als einen ersten Einwand gegen die Theorie von Möller und Rosenfeld betrachten.

H. Volz (Berlin).

Agno, M.: Sul rallentamento dei neutroni nelle sostanze idrogenate. *Nuovo Cimento*, IX. s. **1**, 41—48 (1943).

Aus Experimenten von Amaldi und Mitarb. [E. Amaldi, D. Bocciarelli, B. Ferretti, G. C. Trabacchi, *Ric. Scient.* **13**, 502 (1942); E. Amaldi, D. Bocciarelli, G. C. Trabacchi, *Ric. Scient.* **12**, 830 (1941)] ergibt sich, daß die Streuung energiereicher (~ 14 MeV) Neutronen an Protonen nicht isotrop, sondern nach einem Gesetz der Form $1 + b \cdot \cos \theta$ mit $b \approx 0,5$ erfolgt. Verf. berechnet das Geschwindigkeitsspektrum der Neutronen bei der Verlangsamung unter 2 Annahmen: a) $b = \text{konst.}$, b) $b = k \cdot v^2$. Statt des Fermischen Gesetzes

$$N(v)dv = 2Q\lambda(v)dv/v^2$$

ergibt sich im 2. Fall $N(v)dv = 2Q\lambda(v)(k + 1/v^2)dv$.

Ähnlich wie bei Fermi wird dann das mittlere Abstandsquadrat von der Neutronenquelle für eine bestimmte Endenergie berechnet. Ein Vergleich mit Experimenten ist

nicht möglich, da der Streuquerschnitt von Sauerstoff nicht genügend bekannt ist. In reinem Wasserstoff wird für kleine Endenergien unter der Annahme b)

$$\overline{r^2} - \overline{r_{1s}^2} \approx \text{konst.} \approx 58 \text{ cm}^2, \quad \text{bei} \quad \overline{r_{\text{exp}}^2} \approx 260 \text{ cm}^2.$$

H. Volz (Berlin).

Wheeler, John Archibald: The scattering of alpha-particles in helium. Phys. Rev., II. s. 59, 16—26 (1941).

Die vorliegenden Experimente werden erklärt durch die Überlagerung der Streuung von α -Teilchen der drei Drehimpulswerte 0, 2 und $4 \cdot \hbar$. Die Abhängigkeit der Streuintensität vom Winkel hängt dann von 3 Phasenkonstanten ab. Unter Heranziehung der aus dem Prozeß $\text{B}^{11}(p, \alpha)2\text{He}^4$ gefolgerten Existenz eines angeregten Zustands von Be^8 bei 2,8 MeV läßt sich unter mehreren möglichen Wertetripeln dieser Phasenkonstanten eine eindeutige Auswahl treffen. Es folgt dann, daß der angeregte Zustand, entgegen früheren Annahmen, den Spin 0 und gerade „Parität“ hat. Die Existenz eines weiteren, sehr breiten angeregten Zustands vom Spin 2 zwischen 4 und 5 MeV ist wahrscheinlich. Über die Kraft zwischen den α -Teilchen ist keine spezialisierte Annahme notwendig; aus der Stärke des Anteils der Teilchen vom Spin 4 folgt nur, daß ihre Reichweite kleiner ist als $9 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$. C. F. v. Weizsäcker (Straßburg).

Wheeler, John Archibald: The alpha-particle model and the properties of the nucleus Be^8 . Phys. Rev., II. s. 59, 27—36 (1941).

Diskussion der Experimente über die Reaktion $\text{B}^{11}(p, \alpha)2\text{He}^4$, bei der vorübergehend ein Be^8 -Kern gebildet wird, führt zu Auskünften über die tiefsten stationären Zustände von Be^8 . Verf. schließt auf die folgenden 3 Zustände: 1. Grundzustand. Spin 0, Energie + 125 KeV, Breite 1 bis 100 eV, Lebensdauer 10^{-15} bis 10^{-17} sec . 2. Spin 0, Energie + 2,8 MeV, Breite 0,8 MeV, Lebensdauer 10^{-21} sec . 3. Spin 2, Energie 4 bis 5 MeV, Breite sehr groß, Lebensdauer $\ll 10^{-21} \text{ sec}$. Es bleibt die Schwierigkeit, zu erklären, warum der angeregte Zwischenkern C^{12} vorzugsweise einen Be^8 -Kern im Zustand 2 hinterläßt, obwohl der Zustand 1 gleichen Spin und gleiche „Parität“ hat. — Eine Erklärung der Zustände durch ein festes Potential zwischen α -Teilchen wird grundsätzlich abgewiesen. C. F. v. Weizsäcker (Straßburg).

Margenau, Henry: Interaction of alpha-particles. Phys. Rev., II. s. 59, 37—47 (1941).

Die Behandlung von Kernen als Molekülen aus α -Teilchen, zwischen denen „van der Waals-Kräfte“ wirken, kann aus der angenäherten quantenmechanischen Behandlung des Problems heraus nicht gerechtfertigt werden. Die Reichweite der anziehenden Kräfte zweiter Ordnung zwischen den α -Teilchen ist nicht größer als die der Austauschkräfte erster Ordnung, welche bei Wahl einer symmetrischen Hamiltonfunktion abstoßend sind. Ferner sind die Kräfte zwischen α -Teilchen nicht additiv. Die Kräfte werden nach einem Modell berechnet, das die Eigenfunktionen der α -Teilchen durch Gaußfunktionen darstellt. Die Streuung von α -Teilchen in Helium kann durch diese Rechnungsweise nur teilweise dargestellt werden; man erhält nicht bei der richtigen Energie Resonanz. C. F. v. Weizsäcker (Straßburg).

Feenberg, Eugene: A note on the density and compressibility of nuclear matter. Phys. Rev., II. s. 59, 149—150 (1941).

Die Kompressibilität der Kernmaterie, für die eine Abschätzung nach dem statistischen Modell gegeben wird, hat einen kleinen Einfluß auf die Coulombenergie der Kerne. Der Vergleich mit der Erfahrung ist im gegenwärtigen Zustand der Theorie noch nicht in eindeutiger Weise möglich. C. F. v. Weizsäcker (Straßburg).

Phillips, M., and E. Feenberg: Coulomb exchange energy in light nuclei. Phys. Rev., II. s. 59, 400 (1941).

Beobachtete periodische Schwankungen des Unterschieds der Massendefekte zweier leichter ungerader isobarer Kerne mit der Kernmasse mit der Periode 4 lassen sich durch die nach dem Hartree-Modell berechnete Coulombsche Austauschenergie deuten. C. F. v. Weizsäcker (Straßburg).

Landau, L.: On the „radius“ of the elementary particles. *Phys. Rev.*, II. s. 58, 1006—1007 (1940).

Eine Grenze der Anwendbarkeit der quantenmechanischen Rechenverfahren wird bestimmt durch die Forderung, die Rückwirkung des Eigenfeldes auf ein Teilchen solle klein sein gegen die Wirkung äußerer Felder. Diese Bedingung wird in die Form $\sigma_0 \ll \lambda^2$ gebracht, wobei σ_0 der Streuquerschnitt von Wellen mit kleinem Drehimpuls und $2\pi\lambda = \lambda$ die Wellenlänge dieser Wellen ist. In der klassischen Elektrodynamik bedeutet das $e^2/mc^2 \ll \lambda$, in der Quantenelektrodynamik für Streuung an Teilchen vom Spin $\frac{1}{2}$ hingegen $e^2 \ll \hbar c$, also eine immer erfüllte Bedingung, für Teilchen vom Spin 1 jedoch wieder $e^2/mc^2 \ll \lambda$. (Diese Bedingungen sind für die Anwendbarkeit der üblichen Rechnungsweise notwendig, aber nicht notwendigerweise hinreichend. Ref.)

C. F. v. Weizsäcker (Straßburg).

Landau, L., and I. Tamm: On the nature of the nuclear forces. *Phys. Rev.*, II. s. 58, 1006 (1940).

Nach Tamm [*Phys. Rev.* 58, 952 (1940)] hat die Wellengleichung eines Teilchens vom Spin 1 mit einem Bahndrehimpuls $\geq 1 \cdot \hbar$ eine wesentliche Singularität im Koordinatenursprung. Schneidet man das singuläre Potential bei e^2/mc^2 ab, so kann man das resultierende Potential durch ein Kastenpotential annähern, indem je nach der Art des Abschneidens kein stationärer Zustand oder einzelne Zustände möglich sind. Die Verff. deuten das Neutron als einen derartigen Bindungszustand eines negativen Mesons an ein Proton. Die Kernkräfte wären dann eine Folge der elektrischen Kräfte zwischen Proton und Meson.

C. F. v. Weizsäcker (Straßburg).

Haas, Arthur E.: On some periodic properties of the system of isotopes. *Proc. nat. Acad. Sci. Wash.* 26, 305—312 (1940).

Betrachtungen über die Häufigkeit der Isotope als Funktion verschiedener einfacher Linearkombinationen von Z und A .

C. F. v. Weizsäcker (Straßburg).

Wentzel, G.: Sättigungscharakter der Kernkräfte und Mesontheorie. *Helv. phys. Acta* 15, 685—698 (1942).

Verf. hat früher (dies. Zbl. 24, 238) aus der Mesontheorie der Kernkräfte mit einer neuen Näherungslösung die merkwürdige Folgerung gezogen, daß das Nukleon (Proton oder Neutron) imstande ist, Mesonen an sich zu binden, so daß „Proton-Isobare“ entstehen. Im Falle des skalaren geladenen Mesonfeldes gibt es Isobaren mit den Ladungszahlen $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Die Masse ist etwa von der Form:

$$M_n = \text{konst.} + \frac{\delta}{2} \left(n - \frac{1}{2} \right)^2.$$

Diese Ergebnisse sind von Oppenheimer und Schwinger, Pauli, Serber und Dancoff auf andere Feldtypen übertragen worden, wobei sich zeigte, daß die Gültigkeitsbedingung für die Wentzelsche Methode im praktischen Falle wahrscheinlich erfüllt ist. Die Existenz der Isobare macht eine neue Untersuchung der Stabilitätsverhältnisse innerhalb des Kernes nötig. Eine im Text wiedergegebene einfache Überlegung von Serber zeigt, daß die Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen bei kleinen Entfernungen keinen Sättigungscharakter besitzt (bei größeren Entfernungen sorgt die etwas größere Masse der Isobare dafür, daß die Wechselwirkung den üblichen Austauschcharakter besitzt). Sodann entwickelt Verf. eine Thomas-Fermi-Näherung, wobei eine vierdimensionale Verteilung der Nukleonen betrachtet wird (die Variablen sind x, y, z und die zur Ladungszahl n konjugierte Variable ϑ). Die Rechnung wird für den Fall der skalaren Mesontheorie durchgeführt; es ergeben sich tatsächlich Schwierigkeiten mit der Stabilität der Kerne. Die Methode ist wahrscheinlich auch für die Untersuchung der anderen Varianten der Mesontheorie sehr geeignet.

G. C. Wick.

Leprince-Ringuet, L., E. Nageotte, S. Gorodetzky et R. Richard-Foy: Mesure directe de la masse d'un méson précédé d'un résumé des preuves expérimentales de l'existence du méson. *J. Phys. Radium*, VIII. s. 2, 63—71 (1941).

Nach einem Bericht über die Methoden des Beweises der Existenz des Mesons

und der Bestimmung seiner Masse wird die genaueste Massenbestimmung, durch den Stoß eines Mesons mit einem ruhenden Elektron, besprochen. Die Verff. haben einen derartigen Stoß unter günstigen experimentellen Bedingungen beobachtet und finden in diesem Fall eine Masse des Mesons von 240 ± 22 Elektronenmassen.

C. F. v. Weizsäcker (Straßburg).

Marshak, R. E., and V. F. Weisskopf: On the scattering of mesons of spin $\frac{1}{2} \hbar$ by atomic nuclei. *Phys. Rev.*, II. s. 59, 130—135 (1941).

Ausgehend von einer Paartheorie der Kernkräfte, nach der die Wechselwirkung der Kernteilchen durch Paare von „Mesonen“ (schweren Elektronen) vom Spin $\frac{1}{2}$, die sich nur durch die größere Masse von gewöhnlichen Elektronen unterscheiden, vermittelt wird, berechnen die Verff. den Streuquerschnitt eines derartigen Mesons an einem Kern. Er ergibt sich etwa 1000mal kleiner als der Streuquerschnitt für Mesonen vom Spin 1 und ist damit im Einklang mit der Erfahrung. Der Prozeß ist von erster Ordnung in der Wechselwirkungsenergie. Die Kleinheit des Streuquerschnitts ist eine Folge der Kleinheit der Wechselwirkungskonstante, die ihrerseits daraus folgt, daß die zwei Teilchen wegen der auftretenden größeren statistischen Faktoren bei gegebener Wechselwirkungskonstante eine größere Kernkraft ergeben als das eine Yukawasche Meson bei einem entsprechenden Wert der elementaren Wechselwirkung. Der Wirkungsquerschnitt wächst auch hier mit wachsender Energie des einfallenden Mesons linear an. Der Einfluß der hier nicht berücksichtigten höheren Näherungen muß das Resultat entscheidend modifizieren.

C. F. v. Weizsäcker.

Kobayasi, M.: Distinction between longitudinal and transverse mesons. *Phys. Rev.*, II. s. 59, 843—844 (1941).

Die Wirkungsquerschnitte für den Stoß longitudinaler und transversaler Mesonen werden getrennt berechnet. Die transversal polarisierten Mesonen haben Stoßquerschnitte der Größenordnung 10^{-27} cm^2 , die longitudinalen der Größenordnung 10^{-28} cm^2 , der Übergangsquerschnitt zwischen beiden Polarisationsrichtungen ist im elektrischen Feld einer Ladung Ze von der Größenordnung $Z^2 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$. Verf. nimmt daher an, daß die zur Erklärung des Unterschiedes der Erscheinungen in der hohen Atmosphäre und auf Meeresniveau postulierten beiden Mesonensorten in Wirklichkeit Mesonen der beiden Polarisationsrichtungen sind, und daß insbesondere auf Meeresniveau nur noch longitudinale Mesonen vorkommen.

C. F. v. Weizsäcker.

Snyder, H.: Are there spin one mesotrons? *Phys. Rev.*, II. s. 59, 1043 (1941).

Nach Christy und Kusaka [*Phys. Rev.*, II. s. 59, 414 (1941)] haben die Mesonen auf Meeresniveau wahrscheinlich den Spin 0. Da die Kernphysik auch die Existenz von Mesonen von Spin 1 fordert, ist zu erwarten, daß diese auch in der hohen Atmosphäre entstehen. Wenn sie auf Meeresniveau nicht beobachtet werden, ist zu folgern, daß sie in etwa 10^{-8} sec oder noch rascher zerfallen.

C. F. v. Weizsäcker.

Rozental, S.: Meson lifetime and radioactive β -decay. *Phys. Rev.*, II. s. 60, 612—613 (1941).

Nach Møller und Rosenfeld (dies. Zbl. 23, 287) und Møller (dies. Zbl. 15, 140) ist es für die Theorie der Kernkräfte vorteilhaft, zwei Mesonensorten, nämlich ein vektorielles und ein pseudoskalares Mesonenfeld, anzunehmen. Mit den durch die Forderung einer Invarianz gegenüber fünfdimensionalen Transformationen bedingten Einschränkungen der unabhängigen Parameter hängen die Lebensdauern der beiden Mesonensorten noch von zwei frei wählbaren Konstanten ab. Man kann diese so bestimmen, daß die Lebensdauer der vektoriellen Mesonen sehr viel kleiner wird als diejenige der pseudoskalaren. Damit könnte die Diskrepanz zwischen der aus der Kernphysik nach der Yukawaschen Theorie folgenden und der in der Höhenstrahlung beobachteten Lebensdauer des Mesons behoben werden: in der β -Strahlung der Kerne beobachtet man den Zerfall der rascher zerfallenden vektoriellen Mesonen; diese zer-

fallen in die Höhenstrahlung schon in der hohen Atmosphäre, so daß weiter unten vorzugsweise die langsam zerfallenden pseudoskalaren Mesonen beobachtet werden.

C. F. v. Weizsäcker (Straßburg).

Molière, G.: Die räumliche und Winkelverteilung der Teilchen in den Luftschauern der Höhenstrahlung. Naturwiss. 30, 87—89 (1942).

Verf. verbessert die Näherung von Euler und Wergeland [Astrophysica Norwegica 3, 165 (1940)] und berichtigt Berechnungen von Landau [J. of Physics 3, 237 (1940)]. Ausgangspunkt der Rechnung sind die Landau-Rumerschen Integralgleichungen der Kaskadentheorie, ergänzt um Glieder, die die Rutherford-Streuung der Elektronen berücksichtigen. Die Verteilung der Schauerteilchen über den Winkel und über den räumlichen Abstand r von der Schauerachse wird, jeweils als Funktion der Energie, berechnet. Die Anzahl der Teilchen besitzt in der Schauerachse eine Singularität wie r^{-1} . Der Schauer ist breiter als nach Euler und Wergeland, aber nicht so breit wie nach Landau. Die Übereinstimmung mit der Erfahrung ist gut.

C. F. v. Weizsäcker (Straßburg).

Landé, Alfred: The ratio of e , c , and h . Phys. Rev., II. s. 58, 843 (1940).

Um die Feinstrukturkonstante a priori zu berechnen, stellt Verf. zwei Fragen: 1. Charakterisieren wir ein Elektron durch seine Ruhenergie mc^2 und eine Zeiteinheit a/c , wie groß ist das Produkt $\mu = mc \cdot a \cdot \hbar^{-1}$? 2. Drücken wir a in der Form $a = \gamma e^2/mc^2$ aus, wie groß ist γ ? Es ist dann $\alpha = e^2/\hbar c = \mu/\gamma$. Für μ hat Verf. [J. Franklin Inst. 229, 768 (1940)] einen Zahlwert abgeleitet. γ bestimmt er aus der Gleichung $a^2\pi = 2\pi\Phi$, wobei Φ der „Wirkungsquerschnitt für Lichtquantenstreuung“ der Thomsonschen Streuformel ist. Es folgt $\alpha^{-1} = 137,1273$.

C. F. v. Weizsäcker.

Gora, E.: Quantentheorie der Strahlungsdämpfung. Z. Physik 120, 121—147 (1943).

Verf. gibt ein allgemeines Verfahren an, um die Strahlungsrückwirkung auf ein quantenmechanisches System zu berechnen. Das Verfahren läuft darauf hinaus, daß alle divergierenden Terme, die in der Störungsrechnung auftreten, weggelassen werden; die regulären Terme werden jedoch streng berücksichtigt. Auf diese Weise läßt sich in einfachen Fällen die Strahlungsdämpfung berechnen. Die Resultate stimmen mit den auf klassischem Wege gewonnenen überein. Ob das Verfahren lorentzinvariant ist, hat Verf. nicht entscheiden können.

M. Fierz (Basel).

Costa de Beauregard, Olivier: Sur la théorie des moments cinétiques propres en relativité restreinte. J. Math. pures appl., IX. s. 21, 267—275 (1942).

In der klassischen Dynamik der Kontinua gibt es keine lokale Drehimpulsdichte, die sich nicht als Bahndrehimpuls auffassen ließe. Verf. untersucht die Voraussetzungen, unter denen es in der relativistischen Dynamik kontinuierlicher Medien einen „Eigen“drehimpuls gibt. Dieser hat unter sehr allgemeinen Voraussetzungen gerade die aus der Diracschen Theorie (des Spins) bekannten Eigenschaften.

Fritz Bopp (Berlin-Dahlem).

Roubaud-Valette, Jean: Sur l'édification d'une géométrie ondulatoire. C. R. Acad. Sci., Paris 214, 791—794 (1942).

Roubaud-Valette, Jean: Sur l'édification d'une géométrie ondulatoire. C. R. Acad. Sci., Paris 215, 173—175 (1942).

Born, Max, and Klaus Fuchs: Reciprocity. 3. Reciprocal wave functions. Proc. roy. Soc. Edinburgh 60, 141—146 (1940).

Pour les parties 1 et 2, cfr. ce Zbl. 23, 89; 27, 286. — Le postulat de la réciprocité peut être satisfait si les intégrations sont effectuées dans les deux espaces $x^\mu = (\vec{r}, t)$ et $p^\mu = (\vec{p}, E)$ sur des hyperboloïdes $P^2 = p^2 - E^2 = b^2$ et $R^2 = r^2 - t^2 = a^2$ à une seule nappe: Soient

$$\Phi^{(b,R)} = \hbar^{-\frac{3}{2}}(e^{iS\hbar^{-1}}, \psi^b)_R; \quad \Psi^{(a,P)} = \hbar^{-\frac{3}{2}}(e^{-iS\hbar^{-1}}, \varphi^a)_P \quad (5)$$

les coefficients de Fourier de $\psi^b(\vec{r}, t)$ et $\varphi^a(\vec{p}, E)$ (avec $S = x_\mu p^\mu$) définis par des intégrales [éq. (4) de la réf. à ce Zbl. 27, 286] à effectuer pour P^2 et $R^2 > 0$, et dont les

valeurs pour $P^2, R^2 < 0$ sont obtenues par le prolongement analytique. Alors le postulat $\Phi^{(b,a)} = \psi^a$; $\Psi^{(a,b)} = \varphi^b$ fournit pour tout k un nombre infini de valeurs propres ($\mu = ab/h$). Elles sont les solutions de l'équation transcendante

$$2\pi\mu(J_{k+1}^2(\mu)) = 1. \quad (6)$$

En plus de ces valeurs réelles, une valeur imaginaire est obtenue, si l'on ne postule que $|\Phi^{(b,a)}| = \psi^a$; $|\Psi^{(a,b)}| = \varphi^b$. — Le premier membre de (6) est alors à remplacer par sa valeur absolue. Les fonctions propres peuvent être normalisées dans les deux cas.

v. Stueckelberg (Genf).

Fuchs, Klaus: Reciprocity. 4. Spinor wave functions. Proc. roy. Soc. Edinburgh **60**, 147—163 (1940).

La méthode de la partie 2 (ce Zbl. **27**, 286) est appliquée à l'équation de Dirac. De $(g^\mu p_\mu - g\varepsilon)\psi(\vec{x}, t) = 0$ (g^μ et g sont les matrices pseudovectorielles et pseudo-scalaires) il suit:

$$\left\{ -\frac{1}{2R^2} \frac{i}{h} [[X], K^2] + \frac{h}{i} [X] \left(\frac{3}{2R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) - g\varepsilon \right\} \psi = 0 \quad (7)$$

avec $[X] = g^\mu x_\mu$. L'équation dans l'espace p_μ a la forme $(g^\mu x_\mu - iqa)\varphi(\vec{p}, E) = 0$ (elle diffère de (7) par $i\alpha$ à la place de ε). Avec les matrices du spin $2is^{\mu\nu} = g^\mu g^\nu - g^\nu g^\mu$, les opérateurs M et N (et donc K) sont généralisés en $\vec{M} = \vec{M} + \frac{1}{2} h \vec{s}^M$, $\vec{N} = \vec{N} + \frac{1}{2} h \vec{s}^N$, $s_x^M = s_x^{23}, \dots, s_x^N = s_x^{01}$. Les valeurs propres de ${}^s M_z = h\mu$, ${}^s M^2 = h^2 \lambda(\lambda + 1)$ et ${}^s K^2 = {}^s M^2 - {}^s N^2 = h^2(\kappa(\kappa + 2) + \frac{1}{4})$ sont $\lambda = l + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ — $\lambda < \mu < \lambda + 1$ et $\kappa = k \pm \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots$. Les fonctions propres sont:

$$\psi_{\kappa\lambda\mu} = \begin{pmatrix} iR^{-1} Z_{\kappa+\frac{1}{2}} (iR\varepsilon/h) \chi_{\kappa\lambda\mu}^{(-1)} \\ R^{-1} Z_{\kappa+\frac{3}{2}} (iR\varepsilon/h) \chi_{\kappa\lambda\mu}^{(+2)} \end{pmatrix} \quad (8)$$

et une deuxième solution ψ^v , dans laquelle $\kappa + \frac{1}{2}$ et $\kappa + \frac{3}{2}$ sont interchangés, et deux autres harmoniques pseudosphériques (chacune à deux composantes) $\chi^{(+1)}$ et $\chi^{(-2)}$ remplaçant $\chi^{(-1)}$ et $\chi^{(+2)}$. La même analyse se fait dans l'espace \vec{p}, E . Les solutions sont intégrables sur $r^2 - t^2 = a^2 > 0$.

v. Stueckelberg (Genf).

Astrophysik.

Kienle, H.: Das Weltsystem des Kopernikus und das Weltbild unserer Zeit. Naturwiss. **31**, 1—12 (1943).

Russell, Henry Norris: Notes on eclipsing variables. Astrophys. J. **95**, 345—355 (1942).

Verf. verbessert Kopals Methode der vorläufigen Bestimmung der Elemente von Bedeckungsveränderlichen derart, daß die bei Kopal noch manchmal vorhandene Divergenz des Verfahrens vermieden ist. Nach dieser vorläufigen Bestimmung (bei der bereits auf Randverdunklung und Elliptizität Rücksicht genommen ist), bringt man Korrekturen für die übrigen Einflüsse an und bestimmt neuerdings die Bahnelemente, die dann die Grundlage für eine Ausgleichung bilden können. Für die vorläufige Bestimmung der Bahnelemente gibt Verf. ein Nomogramm. *G. Schrutka.*

Gleissberg, W.: Integral principles of stellar equilibrium. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A **7**, Fasc. 1/2, 13—19 (1942).

Kienle, H.: Das Alter der Sterne und die Expansion der Welt. Naturwiss. **31**, 149—150 (1943).

Drei Altersbestimmungen kosmischer Objekte: 1. die des Alters der Erde aus radioaktiven Mineralien, 2. die des Alters der Sonne aus dem Energievorrat der Kernreaktionen, 3. die des Alters der Spiralnebel aus der Fluchtbewegung lassen sich zu einem gemeinsamen Resultat eines Alters aller genannten Objekte von etwa $5 \cdot 10^9$ vereinbaren. — Heckmann (Theorien der Kosmologie, Berlin 1942; dies. Zbl. **27**,

371) hatte gegen die Vermutung des Ref., die kinetische Energie der Spiralnebel entstamme Kernreaktionen, welche in einer Urexplosion vor $5 \cdot 10^9$ Jahren die schweren Elemente aus Wasserstoff aufgebaut haben, eingewandt, daß diese Energiequelle nicht ausreicht, um die größten beobachteten Geschwindigkeiten zu erklären. Hiergegen wendet Verf. ein, daß die Energie nicht gleichförmig auf alle Spiralnebel verteilt zu werden brauchte, diskutiert jedoch auch andere Energiequellen.

C. F. v. Weizsäcker (Straßburg).

Spitzer jr., Lyman: The dynamics of the interstellar medium. 3. Galactic distribution. *Astrophys. J.* **95**, 329—344 (1942).

Auf Grund von Radialgeschwindigkeitsmessungen in NGC 18 hat man anzunehmen, daß in elliptischen Nebeln von etwa der gleichen Masse die Zufallsgeschwindigkeiten der Sterne größenordnungsmäßig 200 km/sec betragen. Demgegenüber betragen die Zufallsgeschwindigkeiten von interstellaren Atomen und Staubteilchen höchstens 20 km/sec. Eine Untersuchung über den Mechanismus, dem letztere unterliegen, führt zu dem Ergebnis, daß Elektroneneinfänge und Frei-Frei-Übergänge für die Atome in 10^7 — 10^8 Jahren und Zusammenstöße für die Staubteilchen in 10^5 — 10^6 Jahren einen Gleichgewichtszustand mit der angegebenen Geschwindigkeit erzeugen. Daraus folgt weiter, daß die interstellare Materie in solchen Systemen zum Zentrum bzw. zur Äquatorebene stark konzentriert sein muß. Ihre Gesamtmasse ist in elliptischen Systemen nicht beschränkt, kann aber in streng sphärischen höchstens $4 \cdot 10^{-4}$ der gesamten Sternenmasse betragen. Das beobachtete Licht solcher Systeme muß jedenfalls so gut wie ausschließlich direktes, nicht etwa gestreutes Sternlicht sein. Im Zusammenhang mit diesen Fragen werden einige Beobachtungen von Oort über die Licht- und Massenverteilung in NGC 3115 besprochen. Straßl (Göttingen).

Randers, Gunnar: The equilibrium and stability of ring-shaped „barred spirals“. *Astrophys. J.* **95**, 88—111 (1942).

Als Ausgangspunkt für Studien über Gleichgewicht und Stabilität der Spiralnebel vom Typus der ringförmigen Balkenspiralen untersucht Verf. Gleichgewicht und Stabilität von kreisförmigen Ringen mit elliptischem Querschnitt, die aus inkompressibler Flüssigkeit bestehen und in ihrer Ebene um einen Zentralkörper rotieren. Solche Ringe erweisen sich als stabil gegenüber Variationen des Radius und Abweichungen von der Kreisform. Stabilität besteht auch gegenüber Schwankungen der Querschnittsgröße (bei unveränderter Querschnittsform) längs des Azimuts, falls letztere eine feste Lage im Raum haben; nehmen sie an der Rotation des Rings teil, so haben sie Instabilität zur Folge. Da anzunehmen ist, daß ringförmige Balkenspiralen mindestens gegenüber den gleichen Schwankungen instabil sind, folgt, daß sie nicht als stationäre Gebilde betrachtet werden können. Straßl (Göttingen).

Menzel, Donald H., and Lawrence H. Aller: Physical processes in gaseous nebulae. 17. Fluorescence in high-excitation planetaries. *Astrophys. J.* **94**, 436—448 (1941).

Coutrez, Raymond: Sur la dynamique de la voie lactée. *Bull. Acad. Roy. Belg., V. s.* **28**, 660—675 (1942).

Es wird angenommen, daß in einem Sternsystem die Verteilungsfunktion der Koordinaten q^i und Impulse p_i ($i = 1, 2, 3$) der Sterne einer bestimmten Masse von den Geschwindigkeiten nur in der Form abhängen $f(q^i, p_i, t) = F(Q)$, wo Q eine ganze rationale Funktion 2. Grades der p_i ist, die von gemischten Gliedern $p_1 p_2$ usw. frei sei. Die Kontinuitätsbedingung $\frac{df}{dt} = 0$ liefert dann für die von q^i und t abhängigen Koeffizienten von Q ein System linearer partieller Differentialgleichungen. Lösung und Diskussion von astronomisch interessanten Spezialfällen. [Die Ergebnisse sind sämtlich enthalten in den Arbeiten von Chandrasekhar, The dynamics of stellar systems. *Astrophys. J.* **90**, 1—154 (1939); **92**, 441—642 (1940); dies. Zbl. **21**, 381. Ref.] Heckmann.